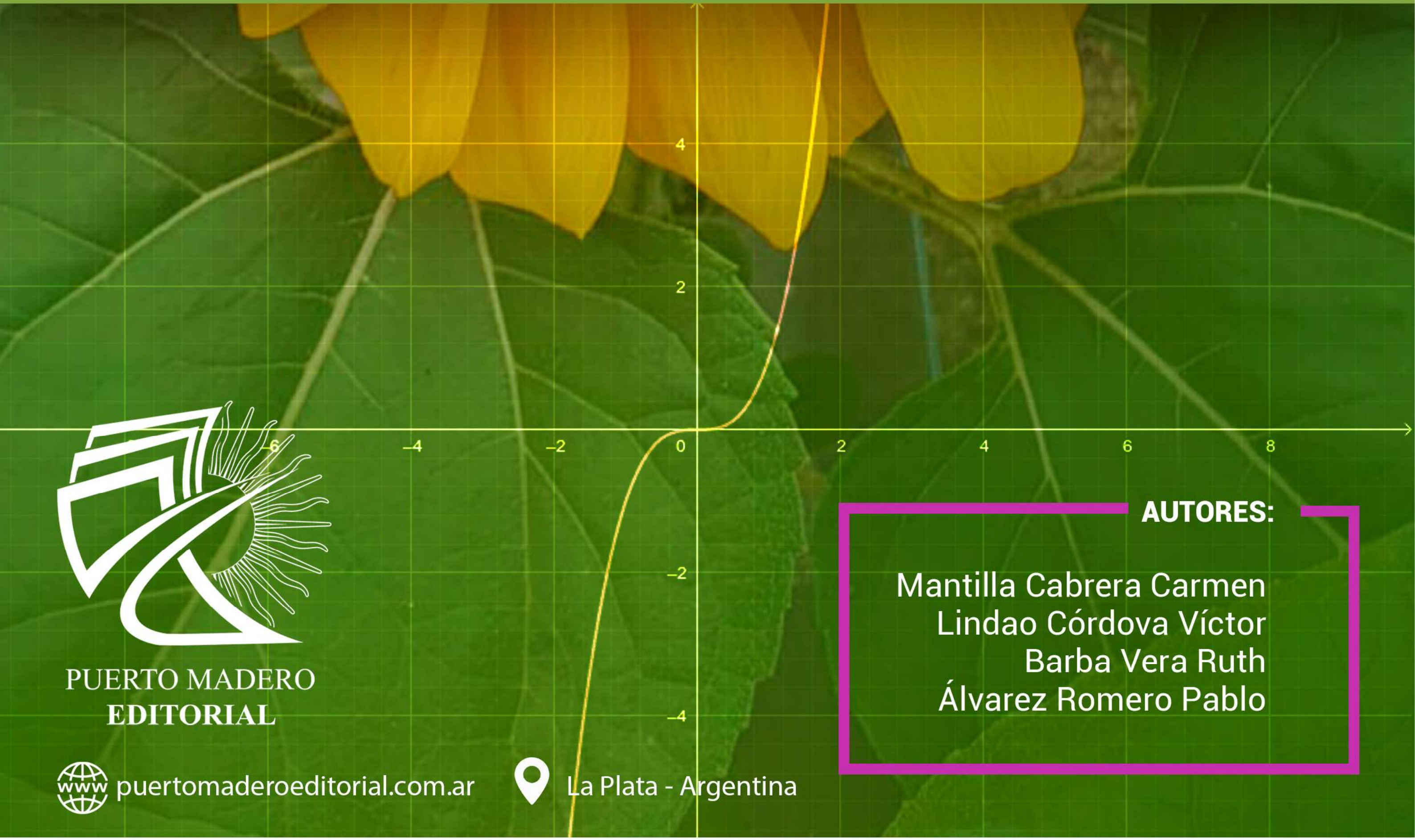
1ra Edición
2023

SOLUCIÓN A PROBLEMAS DE INGENIERÍA AGRONÓMICA

Integrando modelos matemáticos con funciones elementales reales y análisis visual con herramientas software.



AUTORES:

Mantilla Cabrera Carmen
Lindao Córdova Víctor
Barba Vera Ruth
Álvarez Romero Pablo

PUERTO MADERO
EDITORIAL

puertomaderoeditorial.com.ar
La Plata - Argentina

Solución a problemas de ingeniería agronómica integrando modelos matemáticos con funciones elementales reales y análisis visual con herramientas software

Carmen Elena Mantilla Cabrera, Víctor Alberto Lindao Córdova
Ruth Genoveva Barba Vera, Pablo Israel Álvarez Romero
ISBN: 978-987-82912-7-7

Solución a problemas de ingeniería agronómica integrando modelos matemáticos con funciones elementales reales y análisis visual con herramientas software

AUTORES:
Carmen Elena Mantilla Cabrera
Víctor Alberto Lindao Córdova
Ruth Genoveva Barba Vera
Pablo Israel Álvarez Romero

Solución a problemas de ingeniería agronómica integrando modelos matemáticos con funciones elementales reales y análisis visual con herramientas software / Carmen Elena Mantilla Cabrera ... [et al.]. - 1a ed - La Plata : Puerto Madero Editorial Académica, 2023.
Libro digital, PDF/A

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-82912-7-7

1. Agronomía. 2. Software. 3. Análisis Matemático. I. Mantilla Cabrera, Carmen Elena
CDD 338.1

Primera Edición, Marzo 2023

Solución a problemas de ingeniería agronómica integrando modelos matemáticos con funciones elementales reales y análisis visual con herramientas software
ISBN: 978-987-82912-7-7

Editado por:
Sello editorial: ©Puerto Madero Editorial Académica
Nº de Alta: 933832

Editorial: © Puerto Madero Editorial Académica
CUIL: 20630333971
Calle 45 N491 entre 4 y 5
Dirección de Publicaciones Científicas Puerto Madero Editorial Académica
La Plata, Buenos Aires, Argentina
Teléfono: +54 9 221 314 5902
+54 9 221 531 5142
Código Postal: AR1900

<u>Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review)</u>

Corrección y diseño:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: José Luis Santillán Lima

Diseño, Montaje y Producción Editorial:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: Santillán Lima, José Luis

Director del equipo editorial: Santillán Lima, Juan Carlos

Editor: Santillán Lima, Guido Patricio
Caichug Rivera, Daniela Margoth
Santillán Lima, Juan Carlos

Hecho en Argentina
Made in Argentina

AUTORES:

Carmen Elena Mantilla Cabrera

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Facultad de Recursos Naturales, Carrera de Agronomía. Panamericana Sur Km 1 1/2, 060104, Riobamba, Chimborazo. Ecuador

carmen.mantilla@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0001-5422-7073

Víctor Alberto Lindao Córdova

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Facultad de Recursos Naturales, Carrera de Agronomía. Panamericana Sur Km 1 1/2, 060104, Riobamba, Chimborazo. Ecuador

victor.lindao@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-3354-1925

Ruth Genoveva Barba Vera

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Facultad de Informática y Electrónica, Carrera de Telecomunicaciones. Panamericana Sur Km 1 1/2, 060104, Riobamba, Chimborazo. Ecuador

ruth.barba@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-0272-171X

Pablo Israel Álvarez Romero

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Facultad de Recursos Naturales, Carrera de Agronomía. Panamericana Sur Km 1 1/2, 060104, Riobamba, Chimborazo. Ecuador

pabloi.alvarez@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-0743-5210

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

PREFACIO

La ingeniería agronómica es una de las ciencias aplicadas, las diferentes asignaturas que en ella se estudia desarrollan sus conocimientos en base a principios y leyes manifestadas en las ciencias fundamentales como la matemática, física, biología, química y otras. Las matemáticas como eje transversal brindan soporte a las soluciones propuestas en la ingeniería.

Este libro se generó con el objetivo de presentar soluciones a problemas comunes dentro de la agricultura mediante modelos matemáticos que integren funciones fundamentales reales, los contenidos se han organizado de tal forma que se obtenga un buen nivel de aprendizaje, se incluyen ejemplos prácticos reales y problemas básicos fundamentales que provenientes de diversas investigaciones agrícolas con propuestas de soluciones a los problemas de forma práctica mediante el uso de modelos matemáticos aplicadas con funciones elementales y software como soporte para el análisis de los resultados. También se mencionan algunos de los modelos que son de uso frecuente en el quehacer agrícola y la forma de aplicar modelos matemáticos desarrollados en investigaciones previas.

Los conocimientos de modelado con funciones elementales reales afianzan el desarrollo de los profesionales de la carrera de agronomía para ingeniar soluciones efectivas. También, aporta de forma pedagógica para el desarrollo de los estudiantes ya que aprenden funciones identificando la importancia de cada una ella en aplicaciones reales que ayudan al interés y entendimiento en temas en asignaturas posteriores motivando a los estudiantes a profundizar con investigación.

Se organizan los temas de una forma ordenada y articulada, de forma que los estudiantes puedan entender y adquirir habilidades tanto en el pensamiento sintético-geométrico como en el analítico-aritmético, contribuyendo a la capacidad de pensar en ambas formas. Es fundamental que los estudiantes aprendan a modelar con funciones elementales y, al mismo tiempo, comprendan sus representaciones geométricas, lo que les permitirá obtener la ecuación a partir de la gráfica y viceversa, considerando las diferentes características de cada parámetro.

Es por ello, por lo que este texto pretende además de presentar el pensamiento analítico-aritmético también una introducción a sus representaciones de situaciones gráficas y la resolución de problemas mediante una metodología aplicada de modo que el lector mecanice el método.

El texto del libro se presenta divido en seis capítulos: en la primera parte se realiza una introducción de escritura y lectura de textos matemáticos con el lenguaje común para cada área implícito en los temas que se tratan en el libro. La segunda y tercera parte son esencialmente fundamentos ya que se presenta las bases teóricas de funciones y cada una de las funciones elementales para que se puedan utilizar como herramienta para los modelos de las soluciones propuestas.

La cuarta y quinta parte son metodológicas, enseña los pasos y recomendaciones para trazado de gráficas y análisis de estas con software. Por último, el capítulo seis presenta problemas dentro de la agronomía que se pueden resolver mediante la aplicación de modelos matemáticos con funciones elementales reales, aplica las diferentes funciones básicas, realiza las gráficas e interpretación del problema y la solución.

Finalmente me permito citar "Tener las aptitudes y el conocimiento para seguir aprendiendo a lo largo de la vida es más importante que saber matemáticas" (Barrero, 2019), ya eso permite las matemáticas en la vida ingenieril.

RESUMEN

La ingeniería agronómica es una disciplina que se ocupa de la aplicación de los principios y técnicas de la ciencia y la tecnología en la producción de alimentos, la protección de cultivos y el manejo de recursos naturales. Requiere de una gran cantidad de conocimientos en matemáticas para poder tomar decisiones y resolver problemas de manera eficiente, la integración de modelos matemáticos con funciones elementales reales es una técnica muy útil y básica para la resolución de problemas complejos en la agronomía. Estos modelos pueden ser utilizados para predecir el comportamiento de los sistemas agrícolas y evaluar los efectos de los cambios en las variables de entrada. Además, el análisis visual con herramientas software es otra técnica importante en la resolución de problemas en la ingeniería agronómica ya que el uso de gráficos y visualizaciones puede ayudar a identificar patrones y relaciones entre las variables que no son evidentes en los datos crudos,

Este libro presenta la utilidad y relevancia del modelado matemático y la tecnología en la ingeniería agronómica, se encuentra organizado para abordar los contenidos de tal forma que se obtenga un buen nivel de aprendizaje, se incluyen ejemplos prácticos reales y problemas básicos fundamentales provenientes de la experiencia el área agrícola y diversas investigaciones con propuestas de soluciones a los problemas de forma práctica mediante el uso de modelos matemáticos aplicadas con funciones elementales y el software como soporte para el análisis de los resultados mostrando la importancia de la aplicación de las TICs para la toma de decisiones. También se mencionan algunos de los modelos que son de uso frecuente en el quehacer agrícola y la forma de aplicar modelos matemáticos desarrollados en investigaciones previas con el fin de fomentar el interés y la investigación en el campo de la agronomía.

Palabras clave: modelos agrícolas, agro matemáticas, software para análisis, funciones elementales, matemática para agricultura de precisión.

ABSTRACT:

Agricultural engineering is a discipline that applies science and technology principles and techniques in food production, crop protection, and natural resource management. Although it requires a lot of mathematics knowledge to make decisions and solve problems efficiently, integrating mathematical models with fundamental elementary functions is a beneficial and essential technique for solving complex problems in agronomy. These models can be used to predict the behavior of agricultural systems and evaluate the effects of changes in input variables. In addition, visual analysis with software tools is another important technique in problem-solving in agronomic engineering since graphs and visualizations can help identify patterns and relationships between variables that are not evident in the raw data.

This book presents the usefulness and relevance of mathematical modeling and technology in agronomic engineering. It is organized to address the contents so that a good level of learning is obtained, and real practical examples and basic fundamental problems from experience are included. The agricultural area and various investigations with proposals for solutions to problems in a practical way through the use of mathematical models applied with elementary functions and software as support for the analysis of the results showing the importance of the application of ICTs for decision making. It also mentions some of the models frequently used in agricultural work and the way to apply mathematical models developed in previous research to promote interest and research in agronomy.

Keywords: agricultural models, agro mathematics, analysis software, elementary functions, mathematics for precision agriculture.

INTRODUCCIÓN

En cualquier actividad económica o productiva, incluyendo la agricultura, las matemáticas desempeñan un papel fundamental. Los agrónomos deben tener un conocimiento básico de esta ciencia para aplicarla en todas las etapas de la producción, lo que incluye el cálculo de costos de producción para garantizar que la actividad agrícola sea rentable (Morante, 2019). La matemática también se utiliza en los principales procesos productivos agrícolas, como la conversión de unidades de medidas, cálculos de áreas, densidad de siembra, cálculo poblacional, dosis de fertilización y aplicación de pesticidas, cálculo de tiempo y costo del trabajo agrícola, calibración de equipos e implementos agrícolas, entre otros (Chávez, 2013).

Entonces las matemáticas son un eje transversal para soporte a las soluciones propuestas ya que es una herramienta esencial en la agricultura moderna (IICA, 2014). Por lo tanto, es importante que los profesionales del sector agrícola tengan una formación sólida en matemática para mejorar la productividad, la rentabilidad y la sostenibilidad en la agricultura. La matemática proporciona en la formación del futuro ingeniero agrónomo conocimientos, habilidades y destrezas para plantear y resolver problemas prácticos y teóricos en áreas de su actividad profesional, utilizando la formulación e interpretación de modelos en términos matemáticos con pensamiento lógico y objetivo, valorar e interpretar datos intuitivos y empíricos mediante cálculos y representaciones gráficas como herramientas de análisis para fenómenos relacionados a esta área (Ramírez, 2017).

La aplicación de las TICs a través de la utilización de gráficas de funciones y software para interpretación visual es una herramienta fundamental en la agronomía, ya que permite a los profesionales agrónomos analizar y representar de forma clara y sencilla los datos obtenidos en diferentes estudios relacionados con la producción agrícola. La interpretación visual de las gráficas de funciones es esencial en la toma de decisiones en el sector agrícola, lo que puede mejorar la productividad, la rentabilidad y la sostenibilidad de la agricultura (Torres, 2021) .

Este libro presenta ejemplos prácticos reales y problemas básicos fundamentales como parte de la experticia e investigaciones de los profesionales en el área agronómica para inducir a los estudiantes al modelado matemático con funciones elementales reales como solución a problemas en el ámbito agronómico, además recalca la importancia y aplicación del software como soporte para el análisis de los resultados (J. Giraldo, 2013).

Estos conocimientos de modelado con funciones elementales reales afianzan el desarrollo de los profesionales de la carrera de agronomía para ingeniar soluciones efectivas. También, aporta de forma pedagógica para el desarrollo de los estudiantes ya que aprenden funciones identificando la importancia de cada una ella en aplicaciones reales que ayudan al interés y entendimiento en temas en asignaturas posteriores motivando a los estudiantes a profundizar con investigación

IMPORTANCIA DE LA MATEMATICA EN LA AGRONOMIA.

En cualquier actividad económica o productiva, incluyendo la agricultura, las matemáticas desempeñan un papel fundamental. Los agricultores deben tener un conocimiento básico de esta ciencia para aplicarla en todas las etapas de la producción, lo que incluye el cálculo de costos de producción para garantizar que la actividad agrícola sea rentable. La matemática también se utiliza en los principales procesos productivos agropecuarios, como la conversión de unidades de medidas, cálculos de áreas, densidad de siembra, cálculo poblacional, dosis de fertilización y aplicación de pesticidas, cálculo de tiempo y costo del trabajo agrícola, calibración de equipos e implementos agrícolas, entre otros (Chávez, 2013).

Con el avance de la tecnología y la evolución de la agricultura, la matemática se ha vuelto aún más crucial en la resolución de problemas de optimización, estadísticos y de cálculo y relaciones entre magnitudes. En la optimización de procesos, se utilizan sistemas de ecuaciones lineales y se calculan matrices de riesgo y factores de eficiencia. Se utilizan varias ramas de la matemática, como logaritmos, trigonometría y cálculo diferencial e integral, para resolver problemas de cálculo y relaciones entre magnitudes, como el cálculo del pH y la estimación del área de terrenos irregulares (Morante, 2019).

La matemática es fundamental para el control de la producción, el estudio de dinámicas biológicas, la aparición de plagas y enfermedades, y el diseño de modelos matemáticos para el pronóstico de rendimientos, crecimiento o necesidad de riego. En la agricultura de precisión, se utilizan herramientas tecnológicas como Sistemas de posicionamiento global (GPS), drones, sensores y software, que incorporan lenguajes de programación basados en algoritmos matemáticos para el control y el manejo sostenible de los cultivos (IICA, 2014).

Además, la matemática también tiene un papel importante en la conservación del medio ambiente y la sostenibilidad agrícola. La aplicación de modelos matemáticos puede ayudar a predecir y minimizar los impactos ambientales de las actividades agrícolas, como la contaminación de los recursos hídricos o la emisión de gases de efecto invernadero. Por lo tanto, la formación en matemática es esencial para los profesionales del sector agrícola y para los agricultores en general (Ramírez, 2017).

En resumen, la matemática es una herramienta esencial en la agricultura moderna. Desde el cálculo de costos de producción hasta la optimización de procesos y la sostenibilidad agrícola, la matemática se aplica en todas las etapas de producción. Por lo tanto, es importante que los agricultores y los profesionales del sector agrícola tengan una formación sólida en matemática para mejorar la productividad, la rentabilidad y la sostenibilidad de la agricultura.

Por todo lo anteriormente mencionado la matemática debe proporcional en su formación al futuro ingeniero agrónomo conocimientos, habilidades y destrezas para plantear y resolver problemas prácticos y teóricos en áreas de su actividad profesional, utilizando la formulación e interpretación de modelos en términos matemáticos con pensamiento lógico y objetivo, valorar e interpretar datos intuitivos y empíricos mediante cálculos y representaciones gráficas como herramientas de análisis para fenómenos relacionados a esta área.

Entonces el ingeniero agrónomo debe poseer conocimiento y manejo del modelado con funciones elementales, para que, a partir de los enunciados de problemas agronómicos pueda establecer modelos que simulan matemáticamente estos comportamientos y emita soluciones a estas problemáticas.

Los resultados y datos generados en experimentos o ensayos se pueden presentar en gráficas permitiendo el uso racional de los recursos computacionales disponibles mediante software para facilitar el análisis e interpretación. Las gráficas de las funciones modeladas ayudarán a entender mejor del comportamiento de los datos, el comportamiento tendencial de las funciones es intrínseco a la gráfica y esto conllevan relaciones analíticas.

Pues la utilización de gráficas de funciones y software para interpretación visual es fundamental en la agronomía, ya que permite a los profesionales analizar y representar de forma clara y sencilla los datos obtenidos en diferentes estudios relacionados con la producción agrícola, como los análisis de suelos, los experimentos de cultivos, la evaluación de la calidad del agua y el clima, entre otros (Torres, 2021) .

En conclusión, la utilización de gráficas de funciones y software para interpretación visual es una herramienta fundamental en la agronomía, ya que permite a los profesionales agrónomos analizar y representar de forma clara y sencilla los datos obtenidos en diferentes estudios relacionados con la producción agrícola. La interpretación visual de las gráficas de funciones es esencial en la toma de decisiones en el sector agrícola, lo que puede mejorar la productividad, la rentabilidad y la sostenibilidad de la agricultura.

LAS MATEMÁTICAS AL SERVICIO DE LA AGRONOMÍA

La agronomía es de gran importancia en el presente y futuro del mundo, es necesaria para el desarrollo económico y social, además de la seguridad alimentaria nuestro país. La agronomía se podría como una ciencia aplicada si se contrasta con las ciencias puras. Aunque el agrónomo tiene una función meramente práctica que cumplir, para obtener los resultados deseados en la producción de cultivos este debe aplicar los resultados de investigación en física, química y biología en campo, entonces gracias a este tipo de aplicación las ciencias teóricas tienen un significado en el beneficio del ser humano (J. Giraldo, 2013).

La tarea de un agrónomo es hacer que dos plantas crezcan donde antes solo crecía una, y que esto vaya en beneficio de las necesidades de demanda creciente de alimentos, y en este contexto es su responsabilidad buscar métodos para cultivar donde hay recursos escasos de agua, suelo y ser responsable con el ambiente, además de obtener calidad y rentabilidad en la producción de sus cultivos ya que no solo implica su beneficio sino también el desarrollo sustentable de una agricultura, evitar la tala de nuestros bosques, invasión de tierras de pastores y además de garantizar nutrición y salud a nuestros habitantes.

Todo los anteriormente mencionado tiene que ver con estrictamente la aplicación de la ciencias básicas, como la matemática en la investigación agronómica, ya que existen condiciones complejas que rodean la práctica de producción de cultivos en la agricultura en el campo, parcelas de la estación experimental, ambientes controlados pues el agrónomo debe trabajar necesariamente con métodos estadísticos, modelos matemáticos y cálculos que involucran para una eficaz aplicación de decisiones referentes a sus cultivos.

PARA RECORDAR ALGEBRA Y GEOMETRÍA

- Aritmética de funciones y factorización

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd \qquad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c+d} + \frac{b}{c+d}$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) \qquad x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \qquad (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

- Desarrollo de exponenciales y radicales

$$a^{m+n} = a^m a^n \qquad a^{m-n} = a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$$

- Ecuación de la recta conocido 2 puntos:

  Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Ecuación de la recta conocida la pendiente y el punto de corte y=b

$$y = mx + b$$

- Distancia entre dos puntos geométricos:

  Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Propiedades de funciones logarítmicas

$$log_b(xy) = log_b\, x + log_b\, y \qquad log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b\, x - log_b\, y$$

$$log_b\, m^r = r\, log_b\, m \qquad ln\, x = y \to x = e^y$$

$$ln\, e = 1 \qquad e^0 = 1$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

CAPÍTULO 1:

1 LENGUAJE Y NOTACIÓN MATEMÁTICA

Para entender y avanzar con facilidad en cualquier área de la matemática es necesario conocer su lenguaje, notación y simbología. El objetivo de este apartado es fortalecer las bases del conocimiento matemático, mediante el conocimiento los operadores y simbología matemática, notación científica y prefijos, así como las recomendaciones de lectura y escritura de textos con lenguaje matemático.

1.1 INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE MATEMÁTICO

El lenguaje matemático permite saber aplicar los conocimientos adquiridos en la definición y planteamiento de problemas y en la búsqueda de sus soluciones en contextos matemáticos y no matemáticos. Estas habilidades de aprendizaje son necesarias para obtener un alto grado de autonomía en estudio del campo de las matemáticas o en cualquier otra disciplina que requiera conocimientos de matemáticas, ya que nos ayuda a comunicar de forma oral o escrita la información, ideas, problemas y soluciones a un público.

De forma específica la comprensión del lenguaje matemático permite relacionar definiciones de nuevos objetos matemáticos con otros conocidos para asimilarlos y deducir sus propiedades, así como identificar ideas esenciales de las demostraciones de algunos teoremas básicos, abstraer las propiedades estructurales ya que esta se convierte en unas herramientas la resolución de problemas de matemáticas usando modelos matemáticos.

El estudio de esta sección prepara para el entendimiento del desarrollo teórico de los temas necesarios para el planteamiento de problemas y soluciones mediante modelos matemáticos con funciones elementales y sus análisis.

1.1.1 Importancia de los símbolos matemáticos

Cuando se pretende iniciar con la lectura de un texto matemático este podría parecer complejo ya que en este se presentan muchos símbolos que tal vez no se pueden identificar y que no permitan la total interpretación y entendimiento de lo escrito, para evitar este inconveniente se recomienda revisar el lenguaje matemático y también el contexto del escrito.

Este lenguaje se ha desarrollado por muchas personas a través de los tiempos, las matemáticas es un área del conocimiento muy antiguo casi tan antiguo como la

ISBN: 978-987-82912-7-7

astronomía tiene treinta y tres siglos y además es un conocimiento heredado, por eso importante conocer a través de los libros y la escuela lo que ha pasado antes que existiéramos que es lo que nos da la parte de la simbología matemática y las actualizaciones realizadas.

1.1.2 Elementos básicos

Como elementos básicos se tienen los que se presenta en la Tabla 1 que son los números del sistema decimal de 0 a 9, las letras del alfabeto latino romano de la A a Z y los símbolos aritméticos básicos como la suma, resta, multiplicación, división y el signo de igualdad que es muy importante.

Tabla 1. Elementos básicos de lenguaje matemático

Números	Letras			Aritméticos
0	A	K	T	+
1	B	L	U	-
2	C	M	V	*
3	D	N	W	/
4	E	Ñ	X	=
5	F	O	Y	
6	G	P	Z	
7	H	Q		
8	I	R		
9	J	S		

También existe otros alfabetos que apoyan a la escritura matemática como es el alfabeto griego que se presenta tanto en mayúsculas como en minúsculas en la imagen a continuación:

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν
Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω
α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν
ξ ο π ρ ς σ τ υ φ χ ψ ω

Gráfica 1 Alfabeto griego

ISBN: 978-987-82912-7-7

1.1.3 Elementos comunes del lenguaje matemático

Se tienen también elementos comunes como la raíz, infinitos, desigualdades y otros que se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Elementos comunes del lenguaje matemático

√	<<	≡	∴
∞	>>	≔	…
+∞	∑	≔	⋮
-∞	∏		⋱
<	∂		
>	≈		
≅	≅		

Existe muchos más símbolos, hablemos de los de la última columna que están formados por tres puntos, el orden, la posición y el contexto de estos tres puntos puede cambiar definitivamente el contexto del lenguaje matemático.

Es importante mencionar que esto aplica en todas las áreas del conocimiento como matemáticas, astronomía, física y química y también en la transversalidad del conocimiento como astrobiología, nanotecnología, astrofísica, biotecnología y otras más.

1.1.4 Aritmética

Es la base de todo esto en las matemáticas ya que cuando se desarrolló la necesidad de contar se desarrollaron los números y tiempo después las operaciones básicas como suma resta multiplicación y división.

$$\frac{\mathbf{60}}{2} = 30 \qquad \frac{\mathbf{60}}{6} = 10$$

$$\frac{\mathbf{60}}{3} = 20 \qquad \frac{\mathbf{60}}{10} = 6$$

$$\frac{\mathbf{60}}{4} = 15$$

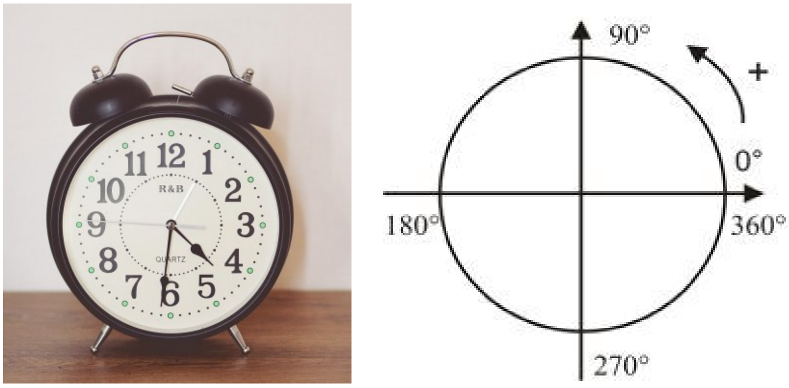
Gráfica 2. Sistema numérico posicional base 60

No solo existe el sistema numérico decimal, hay otros como el sistema numérico posicional base 60 que es muy importante, lo desarrollaron y utilizaron los sumerios y esto se debe a que antes no existían herramientas de cálculo como calculadora, computadora, etc., por lo que era muy difícil hacer operaciones tanto de suma resta multiplicación pero sobre todo división, sin embargo el número 60 es en especial muy favorable para estas divisiones entre 2, entre 3, entre 4, entre 6 y entre 10, como se puede

ISBN: 978-987-82912-7-7

ver en la Gráfica 2, el uso de este sistema no es común pero lo seguimos usando en los minutos, una hora es equivalente a 60 minutos es herencia de los sumerios con el sistema posicional 60.

También se usa los ángulos de 0, 90, 180, 270 y 360 grados (ver Gráfica 3) que también está en base 60 ya que los sumerios trabajaron esto.

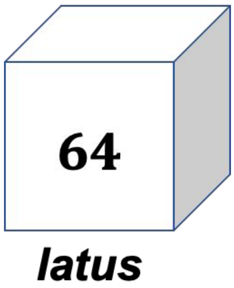


Gráfica 3. Base 60

Tuvo que pasar muchísimo tiempo para desarrollar el álgebra y fue solo hasta el desarrollo del concepto abstracto de la variable, ya que esta representa una cantidad que puede tomar diferentes valores, el nombre de álgebra se debe al persa Al Juarismo qué escribió el libro "Compendio de cálculos completando y balanceando", dentro de este título tan grande hay una parte en persa que se lee como al hardware o lo que hoy sería álgebra esto no significa álgebra (al-jabr wa-l → álgebra) y así fue como se quedó como álgebra. Esto también llevó a otra cosa que es la geometrización porque entre la aritmética y el álgebra sucedió la geometría y los griegos tuvieron muchísimo que ver aquí por qué porque los griegos también empezaban a ver cosas con variables, sin embargo lo que ellos hacían era geometrizar los problemas para darle una solución algebraica utilizando únicamente regla y compás, entonces todo el conocimiento que han adquirido a través del tiempo para esta incógnita fue un desarrollo también surgido de los griegos.

Los griegos utilizaban cualquier problema geométricamente para darle su resultado algebraico ejemplo de esto tenemos: si se tuviese la variable x elevada al cubo igualada a 64, lo que hubieran hecho los griegos para resolverlo es utilizar su conocimiento geométrico dibujando el cubo que sería lado por lado por lado, esto daría el volumen de este cubo que es 64, entonces así es como su incógnita realmente sería el lado (latus) de este cubo para este problema 4 porque 4 * 4 * 4 es equivalente a 64 como se muestra en la Gráfica 4.

ISBN: 978-987-82912-7-7



Gráfica 4. Geometrización griega para resolver problema algebraico

Los árabes encontraron estos escritos griegos y tradujeron la palabra latus mal, la tradujeron como Jack (jadhr) que también significa lado o base y era similar a la incógnita o lado que ellos tenían, sin embargo ocurrió una siguiente traducción que fue a través de los europeos, ellos en base a los escritos árabes tradujeron esta palabra como base o raíz de una planta, es por eso que a la actualidad que en la universidad o en alguna área de conocimiento de matemáticas se ha escuchado encontrar las raíces del polinomio esta palabra de raíz no significa realmente la operación aritmética de la raíz sino hace referencia a encontrar la solución del polinomio, y se debe a una mala traducción que viene desde los griegos. Sin embargo, es importante hablar de esto ya que hay que tener muchísima flexibilidad de pensamiento para entender bien estos temas.

Las matemáticas se reconocen por tres periodos:

1. La matemática retórica que hace referencia a cuando las matemáticas se comunicaban de voz a voz de generación tras generación, cuando no existían los escritos.
2. La matemática anotada esta era cuando lo hacíamos escribiendo con palabras, pues si, un libro de matemáticas de puras palabras.
3. La matemática simbólica, esta se expresa cosas complejas conocidas como enunciados que eran un conjunto de palabra a través de símbolos.

En la actualidad se encuentra tanto las matemáticas anotadas como simbólicas y hay una sinergia entre estas dos, es por eso por lo que se muestran a continuación algunos ejemplos:

- La cuarta parte de un número: representa que dividimos algo en cuatro partes cuatro, cuatro cuartos sería el total, sin embargo, la cuarta parte hace referencia a un cuarto de un número que número que no conocemos o una variable, el resultado sería $\frac{x}{4}$.
- Dos números se diferencian en dos unidades, es decir que vamos a tener dos números cuáles no los conocemos así que nuevamente se trata de variables, pero

ISBN: 978-987-82912-7-7

van a ser dos diferentes que tienen una diferencia de dos unidades así que el primero lo podemos llamar x y el siguiente número $x + 2$.

- Y por último tenemos: número par, esto simbólicamente se expresaría conociendo el concepto de número par, el número par es cualquier número divisible entre dos, y cualquier número divisible para 2 seria $2x$.

1.2 NÚMEROS Y VARIABLES

Para una mejor compresión es necesario repasar conceptos importantes como los números, las variables con las letras y diferentes alfabetos que se encuentran presentes en los escritos de los textos matemáticos.

1.2.1 Sistemas numéricos

Existen sistemas numéricos como el sexagesimal, sin embargo, hay otros que son más usables como el sistema numérico binario, decimal y hexadecimal. Como se puede observar en la Tabla 3, el sistema numérico binario tiene dos elementos cero y uno, el sistema decimal tiene 10 elementos del 0 al 9 y el hexadecimal tiene 16 elementos del 0 al 9 y las letras de la A – F, estos son muy utilizados en áreas de la ciencia y la ingeniería.

Tabla 3. Sistemas numéricos

Binario	**Decimal**	**Hexadecimal**	
0	0	0	A
1	1	1	B
	2	2	C
	3	3	D
	4	4	E
	5	5	F
	6	6	
	7	7	
	8	8	
	9	9	

Dentro del sistema decimal existe la separación decimal que se conoce como punto decimal o coma, este separa la parte entera y la parte fraccionaria, pero para entender cuál es la parte entera y cuál es la parte fraccionaria se necesita aprender de la clasificación de los números.

1.2.2 Clasificación de los números

Dentro de la clasificación de los números tenemos los conjuntos principales se presenta en la Gráfica 5.

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$Complejos\ \boldsymbol{C}\begin{cases} Reales\ \boldsymbol{R}\begin{cases} Racionales\ \boldsymbol{Q}\begin{cases} Enteros\ \boldsymbol{Z}\begin{cases} Naturales\ \boldsymbol{N}\begin{cases} Uno\\ Primos\\ Compuestos\end{cases}\\ Cero\\ Enteros\ negativos\end{cases}\\ Fraccionarios\begin{cases} Exactos\\ \text{Periódico}\begin{cases} Puro\\ Mixto\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ Irracionales\end{cases}\\ Imaginarios\end{cases}$$

Gráfica 5. Clasificación de los números

Los números naturales se representan con la **N,** son con los cuales podemos contar 1, 2, 3, 4, etc., por una definición incluye al cero y lo define como la ausencia de elementos, solo ciertas áreas de la ciencia ocupan a los números naturales incluyendo al cero, por lo que se tiene que hacer la especificación de que son números naturales incluyendo al cero.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ..\}$$

El conjunto de números enteros se representa con Z, incluye los negativos, el cero y los naturales podemos hacer relación a una recta numérica grande.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..\}$$

Después se tiene los racionales que son números que se pueden dividir en fracciones un valor $\frac{m}{n}$, como, por ejemplo:

$$Q = \{\tfrac{4}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{5}\}, \text{ donde para } \frac{m}{n}, \text{ m, n}\in\text{Z y n}\neq 0$$

La condición de esta razón $\frac{m}{n}$ es que sean números enteros y que, además, la n que es la parte del denominador de la fracción tiene que ser diferente de 0, porque dividir entre 0 es una excepción matemática.

Una subclasificación importante son los irracionales que a diferencia de los racionales son estos no podemos expresar en una fracción, algunos de estos números son bastante conocidos como: es el número π = 3.1416… (pi), este tiene muchos decimales no se pueden expresar como una fracción es por eso por lo que se consideran irracionales, otro número podría ser e (Euler o Eiler), y muchas constantes que no se pueden expresar como una fracción de dos números enteros.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Otra clasificación importante son los números reales que incluyen a todos los anteriores y racionales, irracionales, enteros y naturales, todos estos componen a los números reales, este conjunto de número se representa con la letra R. Un ejemplo se muestra a continuación.

$$R = \{e, \pi, -5, 0, 3, \quad \frac{3}{5}, \sqrt{2}\,\}$$

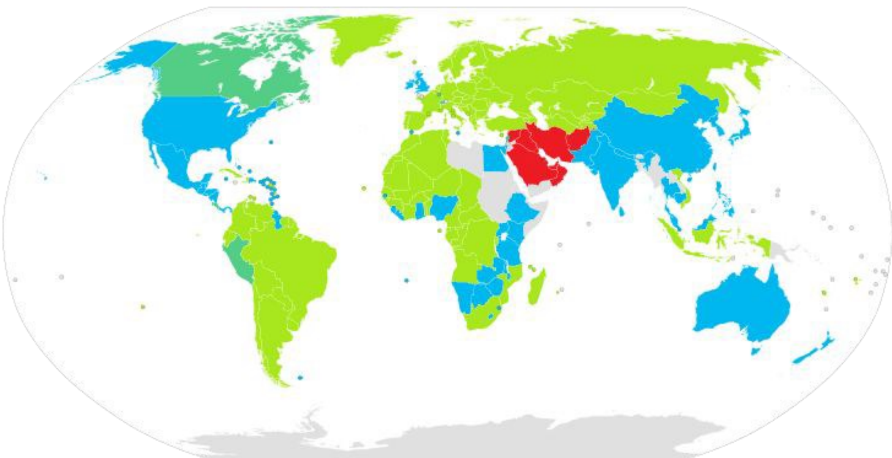
Y por último tenemos a los números complejos que los números complejos, estos relacionan la suma de los reales con los números imaginarios, se representan con la letra C, ejemplo:

$$C = \{x + yi, 3 + 5i, 8i\,\}$$

El primer elemento la x representa cualquier valor real y el valor y cualquier valor imaginario, la $i = \sqrt{-1}$, como se puede observar en el ejemplo el elemento tres.

1.2.2.1 Separador decimal

Como se pudo ver en el apartado anterior se tienen números como los racionales e irracionales que tienen parte entera y parte decimal, en la Gráfica 6, se muestra un mapa que según las zonas escriben de diferente manera los valores con decimales, por ejemplo el área en azul como es México y Estados Unidos y otros que están en azul es utilizado el punto decimal (.), sin embargo en áreas como el verde brillante países como estos tenemos Argentina Brasil, usan la coma (,) y en casi toda Europa en verde un poquito más opaco tenemos aquellos países que usan las dos punto (:) decimal y por último en rojo tenemos la coma alta árabe (‘) porque es en la parte superior.



Gráfica 6. Zonas de uso del separador decimal

La representación del punto decimal es diversa en muchas áreas del mundo, a continuación, se presentan ejemplos de lo anteriormente descrito:

ISBN: 978-987-82912-7-7

Azul	Verde brillante	Verde opaco	Rojo
9.14	9,14	9:14	9’14

1.2.2.2 Los alfabetos

El alfabeto más usado es el alfabeto romano o también llamado latín (ver Gráfica 7), esto se debe a que a nivel cerebral es muy fácil asociar nuestros símbolos con el concepto gracias a la continuidad y a la simetría horizontal, vertical o ambas.

A	E	I	M	Q	U	Y
B	F	J	N	R	V	Z
C	G	K	O	S	W	
D	H	L	P	T	X	

Gráfica 7. Alfabeto Latín

α Alfa	ν Ni
β Beta	ξ Xi
γ Gamma	ο Ómicron
δ Delta	π Pi
ε Épsilon	ρ Ro
ζ Dseta	σ Sigma
η Eta	τ Tau
θ Theta	υ Ípsilon
ι Iota	ϕ Fi
κ Kappa	χ Ji
λ Lambda	ψ Psi
μ Mi	ω Omega

Gráfica 8. Alfabeto griego

Otro alfabeto muy utilizado en la escritura matemática es el alfabeto griego donde tenemos a α, β, γ, estos son muy utilizables para ángulos y también como constantes, es por eso por lo que el uso del alfabeto griego es muy común (Gráfica 8).

1.2.2.3 Uso de las letras

Se debe responder la pregunta ¿Por qué x es la incógnita?

Esto se debe a René Descartes quien empezó a utilizar las últimas letras del abecedario latino x, y, z como incógnitas y las primeras letras como a, b y c como parámetros conocidos, esto se reforzó en el uso para la geometría analítica, pues Descartes es el padre

ISBN: 978-987-82912-7-7

de esta, aquí nombra a los ejes cartesianos como eje *x* al horizontal y como eje *y* al vertical, esto se mantiene hasta la actualidad. Un ejemplo de su uso es:

$$x^2 + 9 = 4$$

1.2.3 Notación científica y prefijos

En la notación científica se utilizan la notación científica apoyándose en los prefijos y sufijos, con el propósito de expresar de manera más compacta números muy grandes o pequeños y los subíndice y superíndice con diversos propósitos como enumeración, diferenciador y contador de iteraciones.

1.2.3.1 Subíndices

Los subíndices son letras o números que se escriben por debajo de la línea principal de la escritura. Para los subíndices hay diferentes categorías de acuerdo con uso los más comunes son:

a) **Enumeración.** – estos subíndices son números que indican el número de esa variable, por ejemplo:

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Esto se leería como x1, x2, x3 y estos tres puntitos significa que puede continuar x4, x5, etc., de esta forma se enumeraría la variable x.

b) **Diferenciadores.** – este subíndice se escribe junto a una variable para diferenciadores, por ejemplo:

$$E_m = E_p + E_c$$

Esta ecuación hace referencia al área de la física para calcular de la energía mecánica, la cual se representa con E_m, este se calcula al sumar la energía potencial (E_p) más la energía cinética (E_c), cómo se puede observar los subíndices m, p y c permiten diferenciar las diferentes energías que intervienen en el cálculo.

c) **Contadores de iteraciones.** – este subíndice se coloca para con contadores las interacciones, por ejemplo:

$$A = (a_{ij})_{2x2}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Por lo general como contadores se utilizan con las variables i, j y k, pero pueden ser cualquier letra como m, n, en este caso se usa como contadores i, j, este texto hace referencia a los contadores de una matriz, donde i cuenta o indica el número de fila y j hace referencia a la de columnas, el otro subíndice 2x2 es un diferenciador que hace referencia a que tiene dos dimensiones, es decir dos filas y dos columnas.

1.2.3.2 Superíndices

Los superíndices son letras o números que se escriben por encima de la línea principal de la escritura. Para los superíndices hay diferentes categorías, los más comunes son:

a) **Potencias. - s**on números que indican el grado de una variable, ose el numero al que esta elevado, por ejemplo:

$$x^2 + 9 = 4$$

En este caso se indica que la variable x es de grado 2 o esta elevado al exponente o potencia 2.

b) **Diferenciadores. -** estos números se colocan para diferenciar en este caso el orden de la derivada, el numero indica que se trata de a segunda deriva de la variable y que se ha derivado respecto a la variable independiente x.

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

c) **Enumeraciones. -** es un número que indica en los textos una referencia, por ejemplo:

$$Teorema\ de\ Pitágoras^1$$

El superíndice 1 indica que se habla del Teorema de Pitágoras en la referencia 1. Estos superíndices también son muy útiles para la escritura en notación científica.

1.2.4 Notación científica

La notación científica permite que números grandes o pequeños se puedan expresar en forma compacta, se expresa en potencias de base 10, como se muestra a continuación:

$$10^3=1000$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$10^2=100$

$10^1=10$

$10^0=1$

$10^{-1}=0.1$

$10^{-2}=0.01$

$10^{-3}=0.001$

En el ejemplo se puede observar que 1000 se puede escribir como 10^3en el caso de un número mayor que 1, incluso el 1 se puede expresar en base 10, haciendo uso de la propiedad de las potencias $m^0 = 1$, donde m representa cualquier número real que al ser elevado a 0 el resultado siempre es 1. Cuando son números pequeños como 0.001, este se puede escribir en base 10 como 10^{-3}.

Entonces, ¿cómo se construyen estos valores?, cuando se tiene un exponente positivo esto significa que se debe multiplicar la base 10 el número veces ese número de veces que indica el exponente, en el caso de 10^3, la base 10 se debe multiplicar tres veces, esto sería 10*10*10 que es 1000, en el caso de los exponentes negativos hay que recordar que pueden ser expresados como una fracción donde el exponente indica cuántas veces multiplicar por sí misma la base en el caso de $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$, en este caso la base 10 va multiplica el número de veces que indica el exponente pero en el denominador, por lo tanto es equivalente a 0.001, dicho de otra forma se ha recorrido tres posiciones a la izquierda el punto decimal, considerar el 10 como un 1.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de escritura en notación científica de algunos números:

$$145000 = 1.45 * 10^5$$

En este caso 145000 en notación científica se puede expresar como $1.45 * 10^5$, es importante mencionar que el valor entero debe estar entre 1 y 9, entonces para encontrar este digito que es 1, se ha recorrido desde el ultimo 0 cinco posiciones hacia la izquierda.

$$0.00000891 = 8.91 * 10^{-6}$$

Para el número 0.00000891 que es u número muy pequeño en notación científica equivale a $8.91 * 10^{-6}$, se puede observar que para encontrar el digito entero se tuvo que recorrer

ISBN: 978-987-82912-7-7

seis posiciones hacia la derecha por lo tanto el exponente debe ser negativo.

$$36667000000 = 366.67 * 10^8$$

Para aclarar lo anteriormente mencionado, sobre que el primer digito de un número que se expresa en notación científica debe estar entre 1 y 9 se tiene el siguiente ejemplo donde se observa que antes del punto decimal se encuentra 366, como se ha recorrido ocho posiciones entonces así ya tendríamos $366.67 * 10^8$, pero es importante resaltar que no se encuentra escrito en notación científica por lo expuesto anteriormente.

Para la escritura en notación científica existen los prefijos notables con sus respectivos nombres tanto para los números muy grandes como para los números muy pequeños, considerando lo que se describió en los párrafos anteriores, estos se muestran en la Tabla 4, a continuación, para números grandes:

Tabla 4. Prefijos para números grandes

Potencia de 10	Prefijo	símbolo	Ejemplo
10^{24}	Yotta	Y	Ym
10^{21}	Zetta	Z	Zm
10^{18}	Exa	E	Em
10^{15}	Peta	P	Pm
10^{12}	Tera	T	Tm
10^{9}	Giga	G	Gm
10^{6}	Mega	M	Mm
10^{3}	Kilo	K	Km
10^{2}	Hecta	H	Hm
10^{1}	Deca	D	dm

Y para los numero muy pequeños en la Tabla 5 se presentan los prefijos:

Tabla 5. Prefijos para números pequeños

Potencia de 10	Prefijo	Símbolo	Ejemplo
10^{-24}	Docto	y	ym
10^{-21}	Zepto	z	zm
10^{-18}	Atto	a	am
10^{-15}	Femto	f	fm
10^{-12}	Pico	p	pm
10^{-9}	Nano	n	nm
10^{-6}	Micro	u	um
10^{-3}	Mili	m	dm
10^{-2}	Centi	c	cm
10^{-1}	Deci	d	dm

ISBN: 978-987-82912-7-7

Un ejemplo del uso de prefijo para el uso de 3 Kilómetros que representa $3 * 10^3$ metros o 2 cm representado por $2 * 10^{-2}$ metros.

1.3 ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA

También en este texto se presenta la nación matemática para aritmética y geometría ya que nos apoyamos en estas para resolución de los problemas propuestos en el contexto de la agronomía.

1.3.1 Operadores aritmético y agrupación

Los operadores aritméticos son la suma (+), resta (-), la multiplicación (*) y la división (/) para la solución de problemas propuestos se recomienda resolver de acuerdo con la jerarquía indicada:

1. División y multiplicación
2. Suma y resta

Mediante este ejemplo se realiza la aplicación de la jerarquía de los operadores:

$10 - 6 * 9/9 =$

Primero según lo indicado se debe empezar con la multiplicación o la división en este caso se realiza primero la multiplicación, entonces se tendría:

$$10 - 54/9 =$$

Y posterior a esto se realiza la división, entonces queda:

$$10 - 9 =$$

Y por último se realiza la suma o la resta, en este caso se tiene que realizar una resta por lo tanto la respuesta seria 4.

Signos de agrupación

Los signos de agrupación ayudan a precisar la jerarquía de las operaciones que se deben realizar, se tiene como signos de agrupación a las {}, [], (), —.

Ahora es importante definir las jerarquías de las operaciones y sería como se define a continuación:

1. Signos de agrupación { }, [ ], ( )

ISBN: 978-987-82912-7-7

2. Potencia y raíz

3. División y multiplicación

4. Suma y resta

Para solventar lo dicho, se presenta un ejemplo:

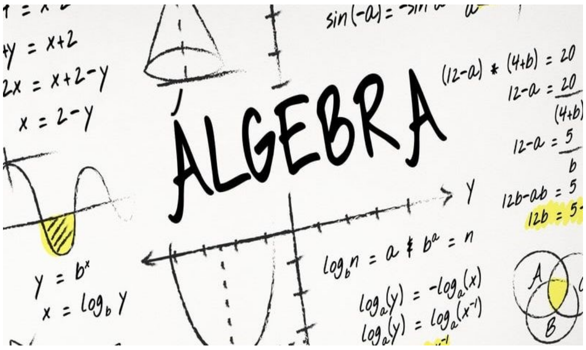
$$\{\,2 * (4 - 3)\}/5 =$$

Teóricamente, se recomienda resolver los signos de agrupación { }, [ ], ( ) este es el caso en teoría, pero en este caso lo primero que se debe realizar son las operaciones más internas, por lo que se realiza la resta dentro el paréntesis, entonces: $\{\,2 * (1)\}/5 =$

Posterior a esto se debe realizar la operación dentro el corchete: $\{\,2\}/5$. Y, por último, la división, entonces el resultado sería $\frac{2}{5}$.

1.4 ALGEBRA

El álgebra es la parte de la matemática que estudia a la cantidad en su forma más general obteniendo generalizaciones sobre el comportamiento operacional de los números.



Gráfica 9. Algebra

Como el estudio de una función conduce finalmente al planteamiento de una ecuación o igualdad, se dice también que el álgebra es la ciencia que estudia las ecuaciones. Utiliza conceptos y leyes propias. Estudia las funciones numéricas para lo cual se emplea números, letras y signos de operación.

El algebra es la herramienta que se usará para modelar con funciones elementales por lo tanto es importante conocer su notación y como se escribe una expresión algebraica que no es nada más que el conjunto de números y letras unidos entre sí por los signos de

ISBN: 978-987-82912-7-7

operación de la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.

Como se muestra en los ejemplos:

1. x
2. $4x$
3. $4x^2 + 5y^2$
4. $\frac{4x^2+\sqrt[3]{5y^2}}{3xy^3}$

1.4.1 Conjuntos

En varios tópicos del presente libro se hace referencia a teoría de conjuntos por lo que es necesario conocer su notación y dar formalidad a este contexto.

Definición. Colección de elementos considerada en sí misma como un objeto.

A continuación, se presenta un ejemplo:

El conjunto de las vocales y sus elementos, entre llaves ponemos los elementos que incluyen a este conjunto en este caso a, e, i, o, u, qué son los elementos del conjunto vocales.

$$\text{Vocales} = \{\text{a}, \text{e}, \text{i}, \text{o}, \text{u}\}$$

El conjunto S representa los días entre semana, entonces entre llaves tenemos lunes, martes, miércoles, jueves y viernes, estos son los elementos del conjunto S.

$$\text{S} = \{\text{lunes}, \text{martes}, \text{miércoles}, \text{jueves y viernes}\}$$

El conjunto de los números enteros representado por Z, son los números negativos, el cero y los positivos, por lo tanto, va desde el infinito negativo hasta -3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3 y continúa con todos los positivos.

$$\text{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

1.4.2 Álgebra de conjuntos

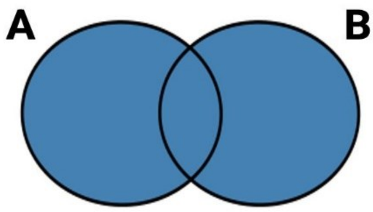
Ahora se da a conocer sobre las operaciones de conjuntos.

Unión (∪)

ISBN: 978-987-82912-7-7

Unión se escribe con el símbolo ∪**,** entonces si tenemos el conjunto **A** y el conjunto **B** se tiene la operación **A** unión **B**, como se describe en la Gráfica 10, esta operación se restringe a lo que se tiene entre las llaves, que dice lo siguiente: los elemento son todos los valores de x, tal que x pertenece al conjunto **A**, aquí aparece el operador ∨ que se vio en los operadores lógicos el cual significa una suma lógica, para fines prácticos pensémoslo como una suma, al valor de x que pertenece a **A** se suma x que pertenece a **B**, entonces son todos los elementos de **A** más todos los elementos de **B**, sencillamente es la operación de Unión.

$$\mathbf{A \cup B = \{ x \mid x \in A \ \ \lor \ \ x \in B\}}$$

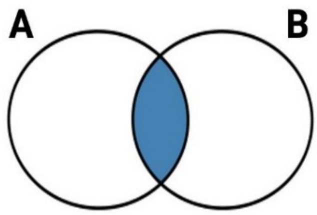


Gráfica 10. Unión de conjuntos

Intersección (∩)

El símbolo de la operación de intersección es una **U** rotada, se ve así ∩. Ahora en la Gráfica 11, si se tiene **A** intersección **B**, entonces las restricciones para los elementos que pertenecen al conjunto de esta operación se tendría lo que está entre llaves, todos los valores de x, tal que x que pertenece a el conjunto **A** y aquí aparece otro símbolo ∧ de los operadores lógicos, este indica una multiplicación lógica, por esto se entiende que x pertenece a **B** y sí son los elementos también de **A**, entonces si los elementos son comunes en ambos, estos elementos sería la intersección de ambos conjuntos.

$$\mathbf{A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \ \land \ \ x \in B \}}$$



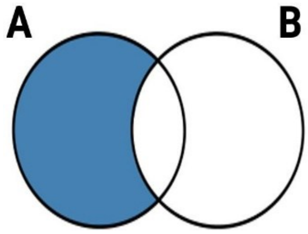
Gráfica 11. Intersección de conjuntos

Diferencia (-)

ISBN: 978-987-82912-7-7

El símbolo de la diferencia es – (resta), se lee **A** diferencia de **B**, otro símbolo para expresar esta operación es la línea diagonal opuesta a la de división (\ ), de tal manera que si se tiene **A\B** también significa la diferencia entre estos dos conjuntos, como se muestra en la Gráfica 12, los elemento del conjunto resultante de esta operación se define por todos los valore de x, tal que x que pertenece **A**, pero x que no pertenece a **B**, lo cual significa que el conjunto de todos los elementos **A** van a ser incluidos exceptuando a todos los elementos de **B** que también contengan **A** ya que estos se van a eliminar, esto significa que todos los elementos de **B** se restan **A**.

$$A - B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$$



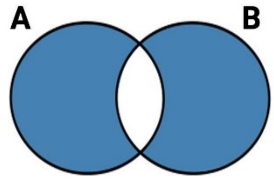
Gráfica 12. Diferencia de conjuntos

Diferencia simétrica (Δ)

El símbolo de la diferencia simétrica se escribe con el símbolo de triángulo **Δ** y se lee de la siguiente manera el conjunto **A** diferencia simétrica con **B**, en la Gráfica 13, se define las restricciones de todos los valores de x como resultado de esta operación, tal que x que pertenece a la operación **A** menos **B**, aparece el símbolo de Unión y x que pertenece a **B** menos **A**, esto significa que vamos a incluir los elementos de la resta de los conjuntos **A** menos **B** y también los de **B** menos **A**. Otra manera de escribir es como se muestra en la segunda ecuación de la Gráfica 13, se elimina el símbolo tal que, pertenece, etc., y únicamente se indica la operación de la diferencia **A** diferencia de **B** y a eso la unión con **B** diferencia de **A**, entonces esto también incluye todos los elementos de **A** y **B** exceptuando la unión entre estos dos.

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$A \Delta B = \{ x \mid x \in A - B \lor x \in B - A \}$$
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

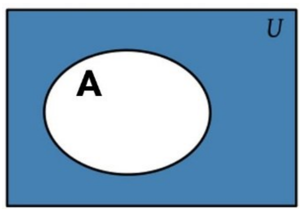


Gráfica 13. Diferencia simétrica de conjuntos

Complemento A^C

La operación de complemento en este caso del conjunto **A**, se escribe **A** pero el complemento es el súper índice **C** o exponente de tal manera que, en l Gráfica 14, se visualiza entre llaves, cómo están definidos los elementos x que corresponden a este conjunto, tal que x que no pertenece a **A** qué es esta **U** que es el universo de los conjuntos que tengamos y se representa con un rectángulo, todo lo que pertenece a los elementos existentes va a ser **U** y **A** es un conjunto de otros elementos, entonces son todas las x que pertenecen a ese universo exceptuando a los elementos que pertenecen a **A**, entonces es lo opuesto al conjunto que está definido.

$$A^c = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

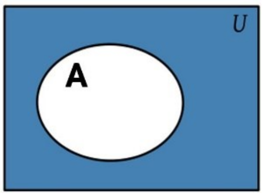


Gráfica 14. Complemento de conjuntos

Para mejor entendimiento de lo anteriormente descrito se plantea un ejemplo de complemento de conjuntos.

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$A = \{5,6,7,8,9\}$$
$$A^C = \{1,2,3,4\}$$



Gráfica 15. Ejemplo complemento

Ahora un ejemplo de complemento, se tiene el universo, está definido por los elementos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, por otro lado, el conjunto **A** contiene los elementos 5, 6, 7, 8 y 9. Se pregunta ¿cuál sería el complemento de **A**?

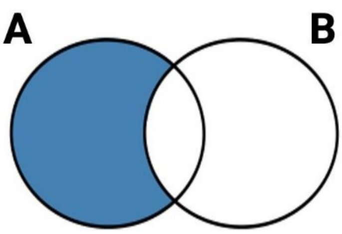
Para responder la pregunta el complemento de **A** serían todos los elementos que no pertenezcan a **A** en el universo **U**, es decir en este caso el primer elemento es 5 este no lo incluye, el siguiente 6 no lo incluye, el siguiente 7 no lo incluye, el siguiente es 8 no lo incluye, el siguiente es 9 no lo incluye, por lo tanto, el complemento de **A** serían los elementos 1, 2, 3 y 4.

Por otro lado, si se tuviera otro conjunto que llamado **B** con los elementos 6, 7 y 8, entonces se plantea ¿cuál sería el complemento de **B**?, considerando el universo anteriormente definido.

Se realiza la misma comparación anterior, 6 no se incluye, 7 tampoco se incluye y 8 tampoco se incluye, los elementos del complemento de **B** entonces serían 1, 2, 3, 4, 5 y 9.

Otro ejemplo para completar tenemos la diferencia de conjuntos:

$$A = \{0,1,3,5,6\}$$
$$B = \{0,2,4,5,6\}$$
$$A - B = \{1,3\}$$
$$B - A = \{2,4\}$$



Gráfica 16. Ejemplo

ISBN: 978-987-82912-7-7

En la Gráfica 16, se presenta el conjunto **A** está definido con los elementos 0, 1, 3, 5 y 6, después se tiene al conjunto **B** definido por los elementos 0, 2, 4, 5 y 6, Se realiza la diferencia entre estos conjuntos primero **A** menos **B**, es decir que se va a incluir a todos los elementos de **A** pero excluyendo a todos los de **B**, entonces veamos cada elemento de **B** para excluir, 0 está excluido porque lo contiene **B**, 2 está excluido sin embargo no pertenece a **A**, 4 tampoco pertenece a **A** así que no se hace nada, 5 también va a ser excluido y sí pertenece a **A**, y por último 6 también va a ser excluido por lo tanto, **A** menos **B** queda definido por los elementos 1 y 3.

Ahora vamos a hacer lo contrario **B** menos **A**, en este caso se incluye a todos los elementos de **B** pero se excluyen a todos los elementos de **A**, es decir lo opuesto a lo que se realizó anteriormente. Se compara el elemento 0 no se incluye en **B**, el elemento 1 tampoco pero no pertenece a **A**, 3 tampoco pertenece a **B** así que no hacemos nada, el 5 sí pertenece así que lo excluimos y el 6 también, entonces la resta o diferencia de **B** menos **A** queda definida por 2 y 4.

Es importante resaltar con este ejemplo que esta operación no tiene propiedad conmutativa, existe una gran diferencia, porque no es lo mismo restar **A** menos **B** que **B** menos **A.**

1.5 APLICACIONES DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Para plasmar el conocimiento sobre lenguaje matemático se realiza recomendaciones y ejemplos de aplicación para la lectura y escritura de textos matemáticos.

1.5.1 Lectura y escritura de un texto con lenguaje matemático

La lectura y escritura de un texto con lenguaje matemático tiene que ver con todo lo antes estudiado en este capítulo, a veces cuando se empieza la lectura de un texto con matemáticas se visualiza una imagen similar a la que se presenta en la Gráfica 17, llena de símbolos y palabras que en su momento no entendemos, sin embargo con los tópicos descritos anteriormente se puede tener un contextos de las anotaciones pues ya se aprendió la simbología y notación matemática por que se tiene toda las herramientas de escritura aritmética, geometría y algebraica necesarias para entender los planteamiento de problemas y soluciones descritos en este libro en el contexto agronómico.

ISBN: 978-987-82912-7-7

"La matemática pura es, de alguna forma, la poesía del pensamiento lógico."

ALBERT EINSTEIN

Gráfica 17. Vista de un texto matemático

Entonces a continuación se dan algunas etapas, consejos y técnicas para que se realice la lectura de un texto matemático con éxito:

1. Es de importancia tener a la mano un compendio de símbolos matemáticos para consulta, que se revise el momento de la lectura para que sea fluida y rápida al identificar símbolos, letras y números.
2. Visualice cada uno de los elementos que tenga adelante después de esto va a poder identificar claramente el área de conocimiento matemático en el cual se escribe el texto.
3. Agregar y esquematizar la información para identificar cada símbolos y palabras a la que hace referencia.
4. Interpretar en base a lo conocido, se recomienda realizarlo parte por parte.

A continuación, se presenta un ejemplo con el texto matemático:

$$A\Delta B = \{x|x \in A - B \vee x \in B - A\}$$

1. Se da una lectura rápida del texto para identificar los símbolos, letras y texto, en ese caso se encuentra un triángulo que podría ser una delta, se visualiza la variable x en diferentes puntos, las letras A y B puede ser que pertenezcan los nombres a una recta, el símbolo *v* este símbolo significa unión, tenemos el símbolo pertenece y los corchetes.
2. Al analizar los símbolos y letras podemos tener la noción del contexto en el que se desarrolla el lenguaje matemático de este texto que es conjuntos.

ISBN: 978-987-82912-7-7

3. Ya identificados todos los elementos el siguiente paso es segregar y esquematizar la información, entonces el triángulo se trata de una diferencia simétrica.

Ahora se interpreta en base lo conocido entonces la diferencia simétrica de A y B, es el conjunto de los valores de la variable x, que sigue las reglas donde que restringe el símbolo talque done indica que la x pertenece al conjunto de la diferencia A-B unión B-A.

ISBN: 978-987-82912-7-7

ISBN: 978-987-82912-7-7

CAPÍTULO 2:

2 FUNCIONES

Después de los conocimientos de aritmética y álgebra, el concepto de función es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas para que el alumno pueda comprender otros conceptos matemáticos. En el siglo XVIII, Leonardo Euler reveló que las funciones son pilar de las matemáticas y que permite su desarrollo formal integral y profunda, además, que se vincula con otras ramas científicas como física, química, medicina, estadística, economía, ingeniería, Psicología y otras en las cuales un valor dependa de otro, es decir se relacionen variables (J. López, 2014).

Este concepto teórico permite la construcción de modelos con funciones elementales de fenómenos cotidianos y dentro de los procesos más comunes dentro de la agricultura para resolver problemas como por ejemplo estimar áreas en función de datos medidos, saber cuánto riego debemos aplicar de acuerdo con los requerimientos del cultivo, el pago a los jornales por horas trabajadas, estimar el crecimiento de una planta en el transcurso del tiempo, etc.

2.1 FUNCIONES REALES

En matemática generalmente se trabaja con funciones reales de variable real, es decir funciones en las cuales el conjunto de inicio genere un conjunto final también real. Es decir:

$$f: R \to R$$

Entonces, f es una aplicación de R en R.

$$x \to f(x) = y$$

Los elementos del conjunto inicial x, mediante una relación generan elementos y de un conjunto también real.

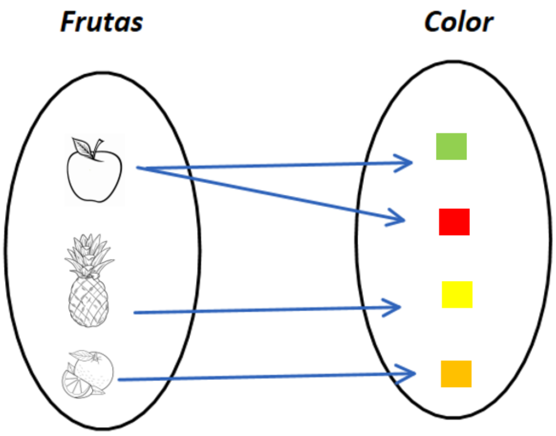
2.1.1 Relación

Antes de definir una función es importante comprender que es una relación matemática, este se define como un vínculo que existe entre los elementos de un subconjunto con respecto al producto de dos conjuntos. Una función implica la operación matemática para

ISBN: 978-987-82912-7-7

determinar el valor de una variable dependiente según el valor de una variable independiente. Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

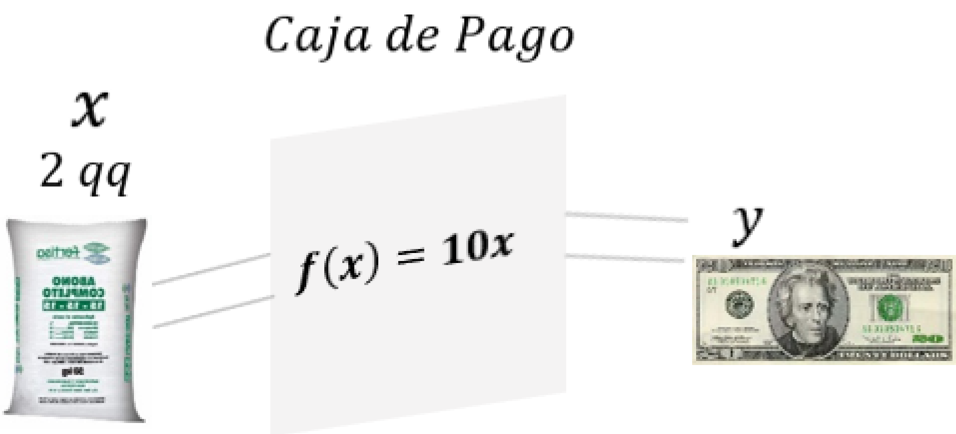
Para ilustrar este concepto se presenta en la Gráfica 18, dos conjuntos, el primero es el conjunto futas y el segundo es color, la relación es color de la fruta, como se puede observar el elemento manzana es de color verde y rojo, la piña es amarilla y la naranja de color naranjado, de esta forma se relacionan los dos conjuntos.



Gráfica 18. Representación de función

2.1.2 Función

Las funciones son de mucho valor y utilidad para solucionar problemas de la vida cotidiana, cosa comunes como comprar cierta cantidad de quintales de abono esta relacionado con el precio a pagar (Gráfic 19).



Gráfica 19. Ejemplo de función

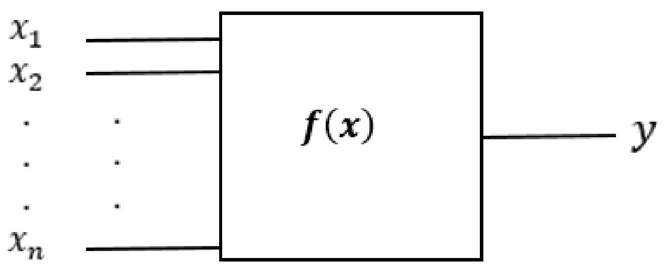
Así en la Gráfica 20, se presenta un ejemplo, si el precio del quintal de abono está a $10 dólares entonces podemos relacionar el valor a pagar de acuerdo con el número de

ISBN: 978-987-82912-7-7

quintales a adquirir, es decir si quiero comprar dos quintales debere pagar $10* 2= $20, y si son 3 quintales sería $10* 3= $30 y asi sucesivamente.

Gráfica 20. Entrada y salida de una función

En la Gráfica 21, se muestra la representacion a una funcion en forma general como una máquina que procesa la entrada x para entregar un único valor de salida y, es decir, si tengo en la entrada un valor de x_1 en la salida tengo un unico valor y, o si el laentrada tengo un valo de x_2 a la salida obtenemos un valor de y, y asi sucesivamente, considerando que unvalor de entrada le corresponde un solo valor de y.



Gráfica 21. Representación de función

2.1.3 Definición:

Una función es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda o ninguno, que llamamos imagen o transformado. Se denota por:

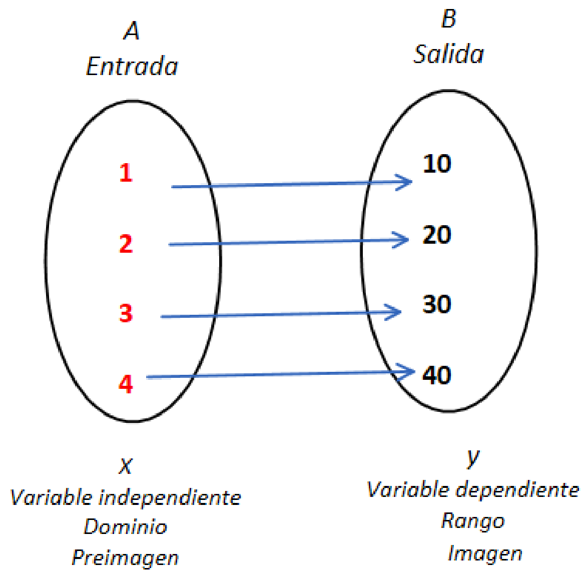
ISBN: 978-987-82912-7-7

$$F: A \rightarrow B$$

Dados un conjunto A y un conjunto B, la función A en B se produce cuando a cada elemento del conjunto A (dominio) se la asigna un único elemento del conjunto B (rango), o sea que en el marco de la función matemática, los elementos del rango dependen de los elementos del dominio (Palin, 2023).

En la Gráfica 22, se representa el ejemplo de la compra de los quintales de abono en forma de conjuntos, el conjunto A es el conjunto de entrada, es decir el numero de quintales de abono que se desea comprar y el B es el conjunto de salida, es decir el valor que se debe pagar.

Como se puede observar en la Gráfica n cumple la definición de función ya que le corresponde un solo valor a pagar a un determinado número de quintales que se debe comprar. Al número de quintales se representa con la variable x que es la variable independiente y como la variable dependiente a y que es el valor por pagar, ya que depende de cuantos quintales se quiere comprar para saber cuánto se debe pagar.



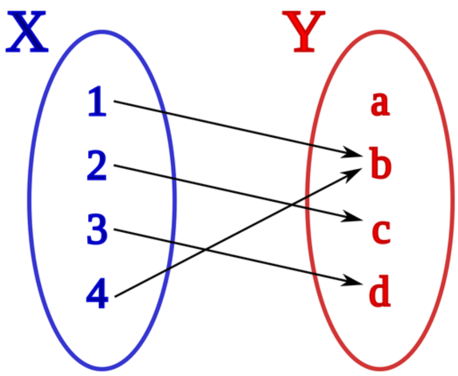
Gráfica 22. Dominio y Rango de una función

Entonces el conjunto de los valores independientes se le conoce como dominio o preimagen y al de los valores dependiente es el rango o imagen.

Para complementar el concepto de función en la Gráfica 23, se presenta otro ejemplo de cómo pudiere presentarse una función, como se puede observa al elemento 1, le corresponde un valor de b y al elemento 4 le corresponde un valor de b, cumple la

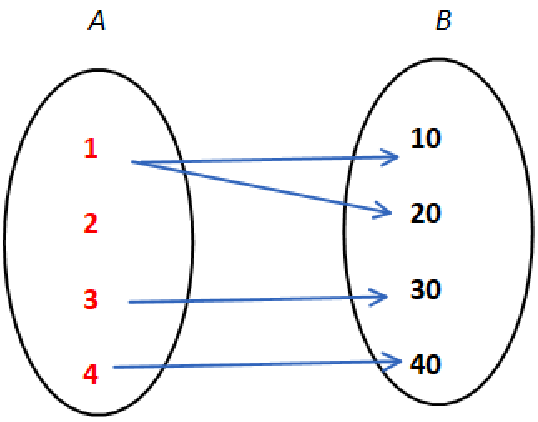
ISBN: 978-987-82912-7-7

definición de función porque cada a un elemento del dominio le corresponde solo uno del rango.



Gráfica 23. Ejemplo de función

En contraste con la imagen de la Gráfica 24, se puede observar que al elemento 1 del conjunto A, le corresponden el elento 10 y 20 del conjunto B por lo que no es una función.



Gráfica 24. Ejemplo de no función

2.2 ANÁLISIS DE FUNCIONES

En la práctica, el análisis de una función se utiliza en muchos campos, incluyendo la física, la ingeniería, la economía, la estadística, ciencias sociales, la computación y obviamente la agronomía, entre otros. Este es un proceso para estudiar y comprender las propiedades de una función matemática, como su dominio, rango, simetría, límites, continuidad, derivadas e integrales.

El análisis de una función ayuda a comprender cómo se comporta la función en diferentes puntos y cómo se relaciona con otras funciones. También puede incluir la identificación de sus puntos críticos, como los puntos donde la función alcanza su valor máximo o mínimo, y los puntos de inflexión, donde la curvatura de la función cambia de signo.

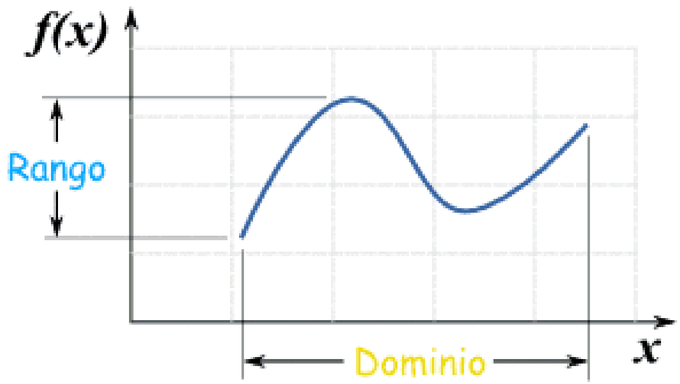
ISBN: 978-987-82912-7-7

En la agricultura un ejemplo es el análisis de una función se utiliza para estudiar el crecimiento de las plantas y para identificar patrones en la producción agrícola (Stewart, 2007a).

2.2.1 Dominio y rango

El dominio de una función real o campo de existencia de esta es el conjunto de elementos para los cuales la función está definida es decir el conjunto de los números para los cuales la función tiene sentido. Entonces este es el subconjunto de los números reales que tienen imagen.

El rango de una función es el conjunto de todos los valores de salida de una función, dicho de otra forma, es el conjunto formado por todos los valores que puede llegar a tomar la función.



Gráfica 25. Representación gráfica del dominio y rango de una función

En la Gráfica 25, se puede observar que el dominio corresponde a los valores de las abscisas es decir la variable independiente x y el rango es el conjunto de valores del eje vertical y que es la variable dependiente.

2.2.2 Representación de una función

Para representar una función existen varias formas de expresarlas, las cuales se mencionan a continuación:

2.2.2.1 Diagramas sagitales

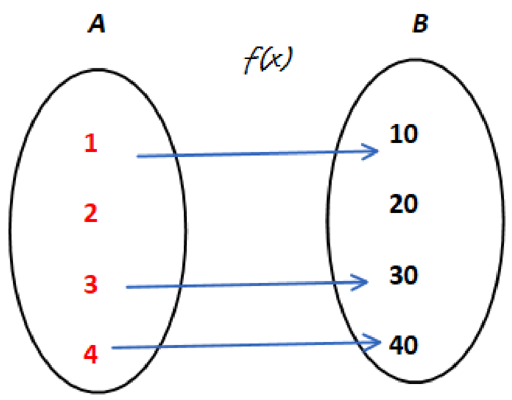
En el apartado anterior ya hemos utilizado el diagrama sagital, ahora se describe formalmente su uso.

Se usa dos círculos etiquetados con una letra mayúscula ya que cada uno representa un conjunto, el de la izquierda representa el dominio y se colocaran los valores de los valores

ISBN: 978-987-82912-7-7

que puede tomar la variable independiente y en el de la derecha el codominio en su interior se colocan los elementos que puede tomar la variable dependiente.

La relación entre elementos se representa con flecha de izquierda a derecha y la relación de la función se coloca entre las etiquetas de los conjuntos (ver Gráfica 26).



Gráfica 26. Representación de función

2.2.2.1.1 Enunciado

Es una descripción en palabra que expresa de forma textual la relación que tiene la variable dependiente respecto a la independiente. Un ejemplo “a cada número se le asocia su doble más uno”.

2.2.3 Función de correspondencia

La función de correspondencia también se conoce como fórmula explícita o expresión analítica, que no es más que una expresión algebraica que indica la relación entre variables.

Del ejemplo de la expresión por enunciado se tiene que la función de correspondencia como:

$$f(x) = 2x + 1$$

Que es expresión práctica de lo que indica la expresión, esta es la forma más se utilizada para representar una función, es de importancia recordar que $f(x) = y$, por lo tanto, se puede también expresar como:

$$y = 2x + 1$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

2.2.3.1 Tablas de valores

Numéricamente es también una forma de expresar una función, estos valores son el resultado de evaluar la expresión analítica.

Como se puede observar en la tabla, para calcular el valor de y, se da un valor a x y se calcula y según la expresión algebraica,

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2x + 1}$
0	$y = 2(0) + 1 = 1$
-1	$y = 2(-1) + 1 = 1$
1	$y = 2(1) + 1 = 3$

Entonces se tendría como resultado:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2x + 1}$
0	1
-1	-1
1	3

2.2.3.2 Conjunto de Pares ordenados

Al igual que en la tabla de valores donde se representa numéricamente los elementos de una función, también estos se pueden escribir como pares ordenados que representan los puntos de que componen una función.

$$\{(x, f(x)) | x \in A\}$$

x corresponde a los elementos del dominio representado por el conjunto A, ya que son pares ordenado no se pueden invertir el orden.

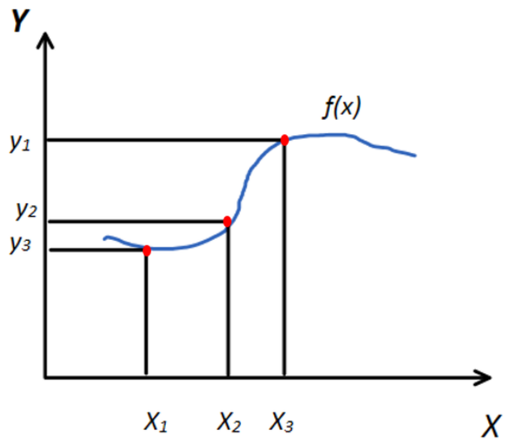
2.2.3.3 Gráficas

Una gráfica permite fácilmente analizar el comportamiento de un proceso, o un conjunto de elementos o signos que permiten la interpretación de un fenómeno. La representación gráfica de una función es un método visual, consiste en representar los datos numéricos (parejas ordenas) en el plano cartesiano, el primer valor que es la variable independiente

ISBN: 978-987-82912-7-7

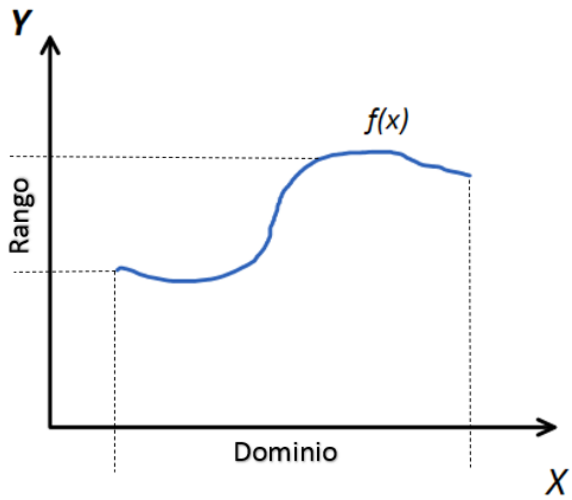
corresponde al eje de las abscisas y el segundo que es la variable dependiente al eje de las ordenadas, luego simplemente se unen los putos graficados mediante líneas, superficies o símbolos, para ver la relación que esos datos guardan entre sí (Ver Gráfica 27).

La grafica de la función f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado, tales que $y = f(x)$, y x está en el domino de f.



Gráfica 27. Gráfica

Observe que las proyecciones de los puntos de la función f sobre el eje horizontal permite visualizar el dominio y las proyecciones sobre el eje ordenado nos muestra el rango.



Gráfica 28. Dominio y rango

En la Grafica 28, se indica que en este caso hemos nombrado a función con el nombre de f, pero se le puede nombrar con cualquier otro, pero esta depende del valor de la variable independiente x, como por ejemplo $g(x)$, $h(x)$, etc.

ISBN: 978-987-82912-7-7

2.3 OPERACIONES CON FUNCIONES

Operar con funciones matemáticas implica realizar diversas operaciones matemáticas, como sumar, restar, multiplicar, dividir, componer, elevar a una potencia, tomar raíces, derivar, integrar, entre otras, sobre las expresiones que representan funciones matemáticas. Su importancia radica en su capacidad para modelar situaciones complejas y para analizar y visualizar datos de diferentes fuentes, al utilizar estas operaciones, los agrónomos pueden obtener una comprensión más profunda de los procesos biológicos que afectan el crecimiento y el rendimiento de los cultivos y pueden tomar decisiones más informadas sobre el manejo de los cultivos. También aporta en la simplificación y transformación de las expresiones para obtener información valiosa acerca de las funciones, como por ejemplo determinar sus valores máximos y mínimos, encontrar sus puntos de inflexión, calcular su área bajo la curva, entre otras aplicaciones (Stewart, 2007b).

En la práctica, la operación con funciones matemáticas se utiliza en diversos campos, como la física, la economía, la ingeniería, la estadística y la computación, entre otros. En la ingeniería agronómica, por ejemplo, el cálculo de la tasa de crecimiento de las plantas se realiza mediante operaciones con funciones matemáticas que describen su comportamiento a lo largo del tiempo, también la relación entre la temperatura y el crecimiento de los cultivos, observar cómo la temperatura afecta la tasa de crecimiento de los cultivos. Y como la disponibilidad de agua y nutrientes, afectan la relación entre la temperatura y el crecimiento de los cultivos (Hukumchand, 2015).

Las operaciones con funciones matemáticas son una herramienta fundamental en diversas disciplinas, incluyendo la agronomía, algunas se describen a continuación:

1. Suma y resta de funciones: se utilizan para combinar dos o más funciones en una sola. Esto es útil para analizar datos de diferentes fuentes y para modelar situaciones complejas en la agronomía, por ejemplo, en el estudio de la dinámica del crecimiento de una planta, se pueden sumar las funciones que representan el crecimiento de las hojas, el tallo y las raíces para obtener la función que representa el crecimiento total de la planta.
2. Multiplicación y división de funciones: se utilizan para relacionar dos o más variables en la agronomía, por ejemplo, en el estudio de la relación entre la cantidad de agua

ISBN: 978-987-82912-7-7

aplicada a un cultivo y el rendimiento, se pueden multiplicar las funciones que representan la cantidad de agua y la eficiencia de uso del agua para obtener la función que representa el rendimiento.

3. Composición de funciones: se utiliza para analizar situaciones en las que una función afecta a otra función, por ejemplo, en el estudio del efecto de los nutrientes en el crecimiento de una planta, se puede utilizar la composición de funciones para analizar cómo la función que representa la disponibilidad de nutrientes afecta a la función que representa el crecimiento de la planta.

Ahora se va a describir los cinco tipos de operaciones con funciones con dos o más funciones que pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas, divididas o compuestas.

2.3.1 Combinación de funciones

Así como los números pueden ser combinados de diferentes maneras, las funciones también pueden ser combinadas para formar nuevas funciones, a esto se le llama comúnmente álgebra de funciones o combinación de funciones.

Para explicar el procedimiento para aplicar estas operaciones se va a definir dos funciones:

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = x + 2$$

2.3.1.1 Suma de funciones

El valor de la **adición de dos funciones** es igual a la suma del valor de cada función. Es decir, para calcular la imagen de una función suma basta con sumar las imágenes de las funciones que intervienen en la operación.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Respecto al dominio de la suma de dos funciones, esta es la intersección del dominio de cada función sumada.

$$Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ahora se va a aplicar la combinación suma de dos funciones con las dos funciones definidas:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Se aplica la suma de las dos funciones:

$$(f+g)(x) = (2x+3) + (x+2)$$

$$(f+g)(x) = 2x+3+x+2$$

$$(f+g)(x) = 3x+5$$

Para hallar el dominio de la función suma se calcula el dominio de cada función por separado:

$$Dom(f) = R$$

$$Dom(g) = R$$

Entonces, el dominio de la función resultante de la operación será:

$$Dom(f+g) = R \cap R$$

$$Dom(f+g) = R$$

Como e puede observar el dominio de la función suma en este caso son todos los reales.

Se recomienda que toda operación con funciones se acompañe de su dominio para definir completamente el resultado.

2.3.1.2 Resta de funciones

La imagen de la **diferencia de dos o más funciones** es la resta de las imágenes de cada función implicada en la operación:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

Respecto al dominio de la resta de dos funciones, es similar a la suma, es la intersección del dominio de cada función sumada.

$$Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Entonces, si una función no está definida en algún valor de la variable independiente x, tampoco lo estará en la diferencia de las funciones.

Ahora se realiza la resta con las dos funciones definidas para el ejemplo:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Restamos las funciones:

$$(f-g)(x) = (2x+3) - (x+2)$$

$$(f-g)(x) = 2x+3-x-2$$

$$(f-g)(x) = x+1$$

Y luego se determina el dominio de la función resta:

$$Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

$$Dom(f) = R$$

$$Dom(g) = R$$

Entonces, el dominio de la función resultante de la operación será:

$$Dom(f-g) = R \cap R$$

$$Dom(f-g) = R$$

Al igual que en la suma el dominio está definido para la función resta en todos los reales.

2.3.1.3 Producto de funciones

Para calcular la **multiplicación de dos funciones**, simplemente debemos multiplicar las expresiones de cada función.

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

Por otro lado, el dominio de la función producto es el conjunto intersección del dominio de cada función multiplicada.

$$Dom(f * g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

Ahora se trabaja el producto con las funciones definidas para el ejemplo:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

Se multiplican las funciones:

$$(f * g)(x) = (2x+3) * (x+2)$$

Al realizar propiedad disributiva se tiene:

$$(f * g)(x) = 2x^2 + 4x + 3x + 6$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$(f * g)(x) = 2x^2 + 7x + 6$$

Y, finalmente, se halla el dominio de la función resultante de la operación:

$$Dom(f * g) = Dom(f) \cap Dom(g)$$

$$Dom(f) = R$$

$$Dom(g) = R$$

Entonces, el dominio de la función resultante de la operación será:

$$Dom(f * g) = R \cap R$$

$$Dom(f * g) = R$$

Al igual que en las operaciones anteriores el dominio está definido para la función resta en todos los reales.

2.3.1.4 División de funciones

El resultado numérico del **cociente de dos funciones** corresponde a la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Aquí es importante considerar que el dominio de la división de dos funciones es el conjunto intersección del dominio de cada una d las funciones excepto los valores de la variable independiente que anulen la función del divisor, pues no existe división para cero, lo que se obtendría es una indeterminación, así fuera.

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x: g(x) = 0\}$$

Ahora se aplica a modo de ejemplo las funciones que se definieron al inicio:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Entonces, la división de las funciones es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(2x + 3)}{(x + 2)}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Para este caso, la función no se puede simplificar, por lo tanto, queda como se mostró arriba.

Por otra parte, el dominio de cada función por separado son todos los números reales

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x: g(x) = 0\}$$

$$Dom(f) = R$$

$$Dom(g) = R$$

Sin embargo, como en el denominador de una fracción no puede haber un cero, por lo tanto, a la intersección se tienen que quitar los valores que anulen el denominador, en este caso $x = -2$, para obtener el dominio de la función cociente.

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = R \cap R - \{-2\}$$

El dominio sería entonces:

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = R - \{-2\}$$

Es decir, todos los reales, excepto el elemento $x = -2$, ya que este elimina el denominador.

2.3.2 Composición de funciones

La composición de funciones es colocar una función dentro de otra y simplificarla. Al igual que con las operaciones básicas, al hacer la composición de funciones generamos una nueva función., también la composición de funciones se expresa cómo la aplicación sucesiva de dos funciones. Algebraicamente, la composición de dos funciones se expresa de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Mientras tanto, el dominio de la composición de funciones se compone del conjunto de todos los valores de x en el dominio de la función f tal $f(x)$ que pertenece al dominio de la función g. Lo dicho se puede escribir de la siguiente manera:

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(f) | f(x) \in Dom(g)\}$$

Ahora se trabaja con el ejemplo propuesto con las funciones definidas:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Para hallar la función compuesta se debe que sustituir la expresión $g(x)$, en la x de donde $f(x)$, entonces queda de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = f(x+2) = 2(x+2) + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f(x+2) = 2x + 4 + 3 = 2x + 7$$

$$(f \circ g)(x) = f(x+2) = 2x + 7$$

En este caso, el dominio de las dos funciones son todos los números reales, por lo que el dominio de la función compuesta también serán todos los números reales.

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(f) | f(x) \in Dom(g)\}$$

Si analizamos por separado los dominios de cada función, tendríamos:

$$Dom(f) = R$$

Y el dominio de la funcion g tambien son los reales: $Dom(g) = R$.

Por lo tanto, el dominio de f que son los reales pertene al dominio de g que tambien son los reales.

Ademas, si visualizamos el resultado de la operacion podemos observar que es una funcion lineal y su domio son los reales.

2.3.3 Propiedades de las operaciones con funciones

La suma y el producto de operaciones con funciones se caracterizan por tener las siguientes propiedades:

Propiedad asociativa: el orden en el que se suman o se multiplican tres o más funciones es indiferente.

$$f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$$

$$f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)] = [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x)$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Propiedad conmutativa: el orden de la suma o multiplicación de dos funciones no altera el resultado.

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$$

Elemento neutro: la operación suma y la operación producto tienen como elemento neutro las funciones constantes $f(x) = 0$ y $f(x) = 1$ respectivamente.

Elemento simétrico: la función suma tiene como función opuesta $-f(x)$

Propiedad distributiva: esta propiedad relaciona las operaciones suma y producto, y se basa en la siguiente igualdad:

$$f(x) \cdot [g(x) + h(x)] = f(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot h(x)$$

La composición de funciones se caracteriza por tener las siguientes propiedades:

Propiedad asociativa: el orden en el que se componen tres es la siguiente:

$$f(x) \circ [g(x) \circ h(x)] = [f(x) \circ g(x)] \circ h(x)$$

No tiene propiedad conmutativa: es decir.

$$f(x) \circ g(x) \neq g(x) \circ f(x)$$

Elemento neutro: el elemento neutro es la función identidad.

$$i(x) = x$$

$$f(x) \circ i(x) = i(x) \circ f(x) = f(x)$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

ISBN: 978-987-82912-7-7

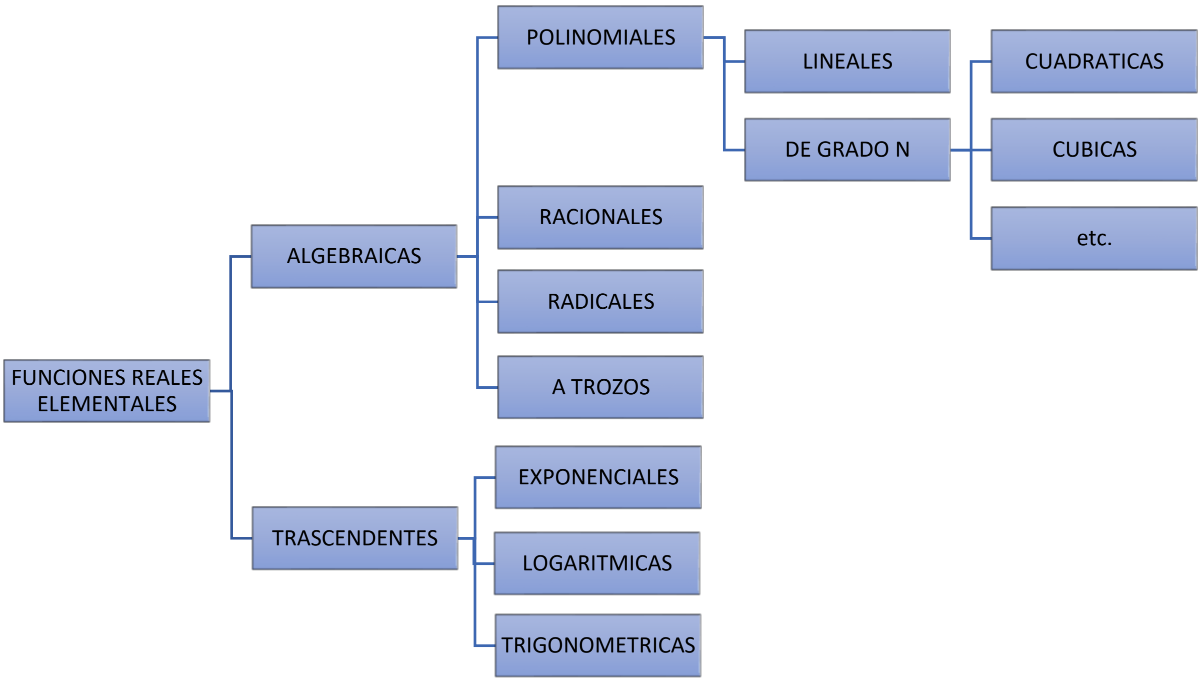
CAPÍTULO 3:

3 FUNCIONES REALES ELEMENTALES

En las matemáticas, existen funciones muy particulares que sientan la base para definir otras funciones más complejas, a este conjunto de funciones se les llama Funciones Elementales (Gráfica 29). Vamos entonces a describir cada una de estas, definiendo su dominio más grande y su rango. Además, se mostrará la representación gráfica de éstas en el plano cartesiano.

Se identificará visualmente el dominio de una función trazando rectas verticales imaginarias por todo el plano cartesiano, ya que un punto está en el dominio si una recta corta a la curva que define la función f y al eje X al mismo tiempo.

De igual forma se identificará visualmente el rango de una función trazando rectas horizontales imaginarias por todo el plano cartesiano, ya que un punto está en el rango si una recta corta a la función f y al eje Y al mismo tiempo.



Gráfica 29. Funciones reales elementales usuales

En matemáticas, una función elemental es una función construida a partir de una cantidad finita de exponenciales, logaritmos, constantes, variables, y raíces de ecuaciones mediante composición y combinaciones utilizando las cuatro operaciones elementales (+

ISBN: 978-987-82912-7-7

– × ÷). Las funciones trigonométricas y sus inversas son consideradas dentro del grupo de funciones elementales ya que se pueden obtener mediante el uso de variables complejas y sus relaciones entre las funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logaritmo.

3.1 FUNCIONES ALGEBRAICAS

En una función algebraica explícita la variable independiente y se obtiene combinando un número finito de veces la variable x y constantes reales mediante operaciones algebraicas como suma, resta, multiplicación, división, potencias y radicación.

Definición:
Las funciones algebraicas son las que se relacionan mediante la regla de correspondencia de una expresión algebraica.
Según la definición de las funciones algebraicas, entonces se tiene como parte de esta clasificación las funciones polinomiales, radicales, racionales y funciones a trozos.

3.1.1 Funciones polinomiales

La aplicación de las funciones polinomiales en modelamiento es muy amplia ya que describen muchos fenómenos reales como la distancia recorrida a velocidad constante por un móvil, el total de la venta de cierta cantidad de productos agrícolas u objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión, la concentración de una sustancia en un compuesto, la variación de la altura de un proyectil y otros.

Aunque, no siempre es posible modelar un fenómeno con funciones polinomiales, estas son de interés ya que gracias a que son más simples que otras dentro de la clasificación de funciones esto simplifica su análisis.

En la clasificación de las funciones algebraicas se tienen un conjunto de funciones llamadas **funciones polinomiales,** su nombre hace referencia a que su regla de correspondencia es un polinomio.

Cuando hablamos de una función polinomial de grado n, es de importancia recordar que el grado de un polinomio es el exponente mayor de la variable.

Definición:

Se dice que $f(x)$ es una función polinomial de grado n, si tiene la forma

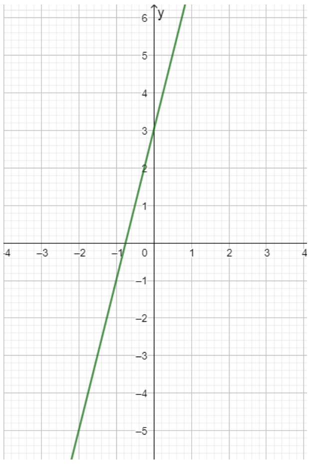
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n$$

$a_n \neq 0$ y $n \in Z^+$

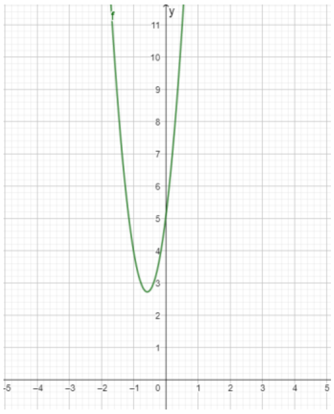
ISBN: 978-987-82912-7-7

Ejemplos:

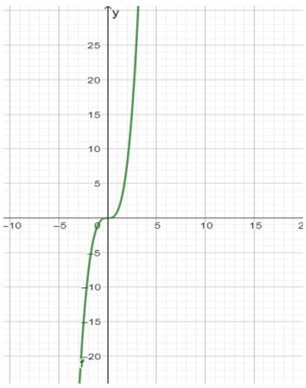
$$f(x) = 3 + 4x$$



$$f(x) = 5 + 8x + 7x^2$$

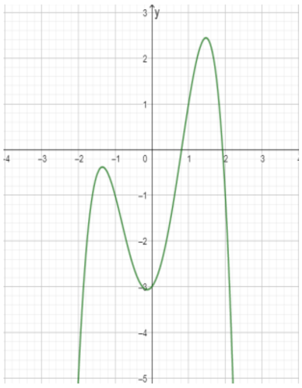


$$f(x) = x^3$$



ISBN: 978-987-82912-7-7

$f(x) = -3 + x + 4x^2 - x^4$



Gráfica 30. Funciones polinómicas

Como se puede observar en los ejemplos (Gráfica 30), todas las funciones polinomiales tienen como dominio al conjunto de números reales **R**, y el rango varía en función de dependencia de la relación de la función establecida.

En los ejemplos también se puede apreciar que una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo $a_n x^n$, donde a_n es un número real y n es un entero no negativo, pues si o fuera tendríamos una expresión fraccionaria.

Existen ejemplos particulares de la función polinomial, todo depende del grado del polinomio, si la función polinomial es de grado uno, entonces se la llama función lineal, si es de segundo grado se tiene una función cuadrática, y si la función polinomial es de tercer grado se tiene una función cúbica. Estos casos se analizan más adelante.

3.1.1.1 Función lineal

Como se mencionó anteriormente la función lineal es una función polinómica cuyo grado es uno, el valor que se le asigna a una instancia de valor de la variable independiente es relación de una suma o resta de una cantidad finita de términos.

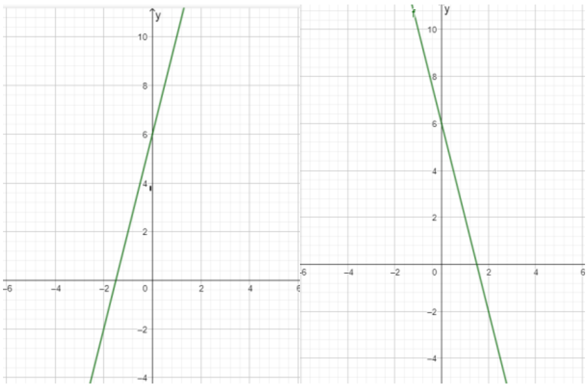
La función lineal puede representarse de forma general con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$
$$a_0, a_1 \in Z \text{ y } n = 1$$

Como se puede observar en la Gráfica 31, puede existir una constante como término independiente y otra constante que multiplica a la variable de grado uno, esta constante a_1 corresponde a la pendiente de la línea recta.

ISBN: 978-987-82912-7-7

También es importante mencionar que si la pendiente es positiva es decir $a_1 > 0$, el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x es agudo. Y si negativa $a_1 < 0$,el ángulo es obtuso.



Gráfica 31. Función lineal

La raíz de la función lineal se puede hallar al igualar $f(x) = 0$, este valor es la intersección de la recta con el eje de las abscisas.

$$a_0 + a_1 x = 0$$
$$x = \frac{-a_0}{a_1}$$

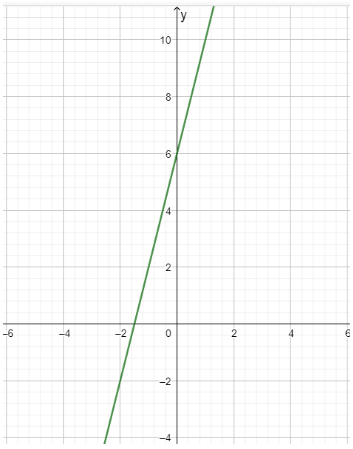
Dentro de las funciones lineales se describe algunas particularidades como:

Función afín

Una función afín se caracteriza por no pasar por el origen existe un cruce con el eje vertical, si su pendiente es positiva es linealmente creciente y si la pendiente es negativa es linealmente decrecientes.

Definición: La función de identidad se define mediante la expresión.

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$
$$a_0, a_1 \in Z, a_0, a_1 \neq 0 \text{ y } n = 1$$



Gráfica 32. Función afín

ISBN: 978-987-82912-7-7

La Gráfica 32, representa a la función afín $f(x) = 6 + 4x$, el número 6 es la ordenada en el origen, la recta corta al eje Y en el punto (0,6). Además, la pendiente es 4 positivo por lo que es una recta linealmente creciente

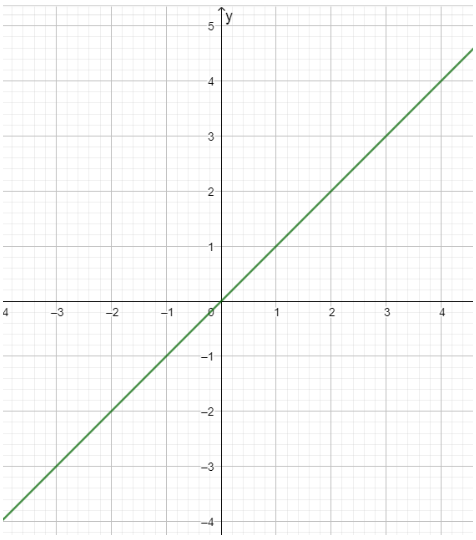
Función Identidad

Esta función tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder el mismo valor en el rango y pueden ser todos los reales.

Definición: La función de identidad se define mediante la expresión.

$$f(x) = x$$
$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ y } n = 1$$

La gráfica de esta función se presenta en la gráfica 33, es una recta que pasa por el origen y si la $a_1 = 1$, entonces tiene un ángulo de inclinación de 45°



Gráfica 33. Función identidad

En la gráfica n se puede observar que el dominio son todos los números reales $\boldsymbol{Dom(f)} = \boldsymbol{R}$, es decir $-\infty < \boldsymbol{x} < \infty$ y el rango también son todos los números reales $\boldsymbol{Rang(f)} = \boldsymbol{R}$, es decir $-\infty < \boldsymbol{y} < \infty$

Función Constante

Esta función tiene la propiedad de que a cada argumento $\boldsymbol{x}$ del dominio le hace corresponder la misma imagen a_0.

Definición: La función constante se define mediante la expresión

$$f(x) = a_0$$

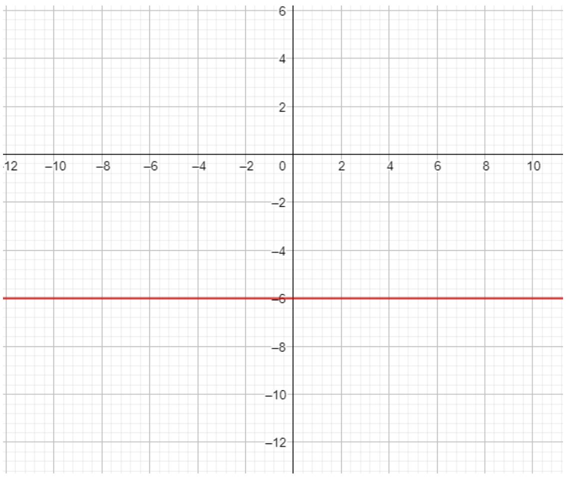
$$a_0 \in R , a_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad a_1 = 0$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Como se puede observar la función constante tiene una pendiente iguala cero, por lo tanto, las gráficas que definen a esta función son rectas paralelas al eje horizontal, si $a_0 > 0$, la recta esta sobre el eje y si $a_0 < 0$, la recta esta debajo del eje x.

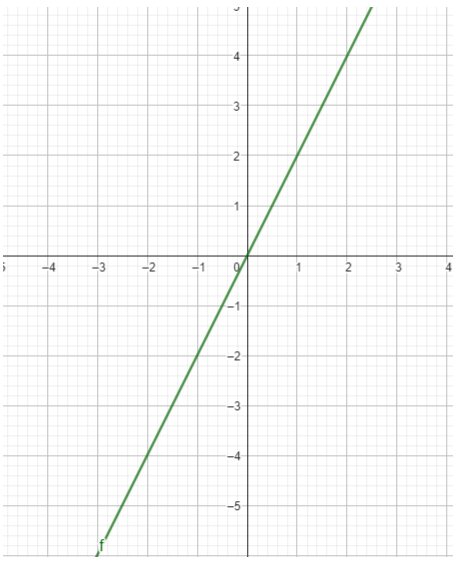
La gráfica 34 arriba, de la función constante $f(x) = 6$, conlleva a una recta horizontal que dista 6 unidades del eje x por arriba y la gráfica 34 abajo, de la función constante $f(x) = -6$ es una recta horizontal que dista 6 unidades del eje x por debajo. El rango es el conjunto unitario $\{6\}$ para la gráfica 34 arriba y $\{-6\}$ el segundo. Además, se puede observar que al no estar presente la variable independiente no existen raíces.

$f(x) = -6$



Gráfica 34. función constante

La función de proporcionalidad se define por una recta que pasan por el origen, describen una proporción entre los valores de las dos variables. Esta razón de proporcionalidad es la pendiente de la recta.



Gráfica 35. Función proporcional

ISBN: 978-987-82912-7-7

La gráfica 35, de la función proporcional $f(x) = 2x$, conlleva a una recta que pasa por el origen, como se puede observar su dominio corresponde a todos los reales y el rango también se tiene todos los reales.

3.1.1.2 Función de grado n

Como se mencionó la función polinomial tiene la forma general $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n$, si $a_n \neq 0$ y $n > 1$, ya no se habla de una función lineal si no que puede ser una función cuadrática, cubica o de otro grado superior.

Es de interés el estudio de las funciones:

3.1.1.2.1 Función Cuadrática

Las funciones cuadráticas son también llamadas funciones parabólicas, son funciones polinómicas de segundo grado.

Definición

Es una función polinomial de grado dos, tiene la forma:

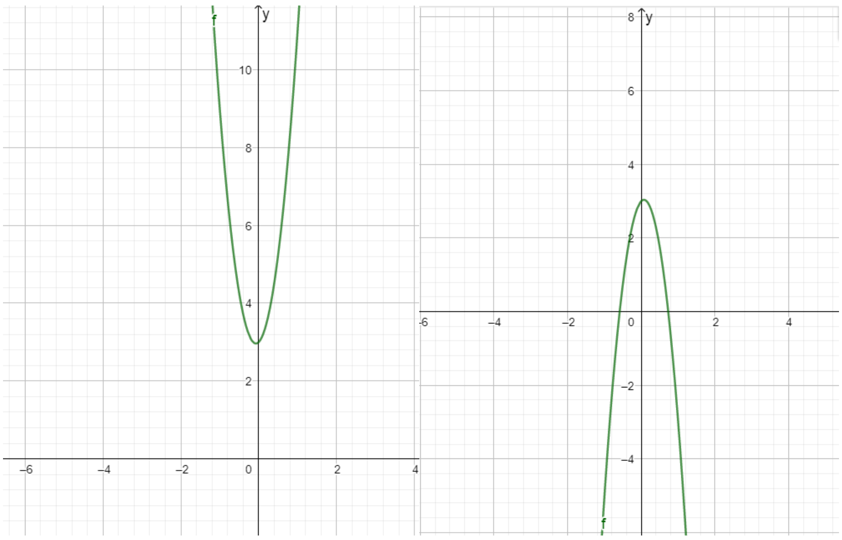
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

donde si $a_2 \neq 0$ y $n = 2$

La grafica de una función cuadrática es una parábola, esta puede ser cóncava si $a_2 > 0$ o convexa si $a_2 < 0$, como se puede apreciar en la gráfica 36.

$$f(x) = 3 + x + 7x^2$$

$$f(x) = 3 + x - 7x^2$$



Gráfica 36. Función cuadrática

Es de importancia conocer algunos elementos de la parábola para su análisis como:

Eje de simetría. – es una recta vertical que pasa por el origen

ISBN: 978-987-82912-7-7

Raíces de x.- Como se puede observar en la gráfica si existe intersección con el eje x a estas se las conoce como las soluciones de la ecuación cuadrática, y se las puede hallar igualar $f(x) = 0$, entonces $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$, entonces al aplicar la fórmula general se obtiene:

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

El termino comprendido dentro del radical conocido como discriminante ${a_1}^2 - 4a_2a_0$, condiciona los valores de x, si ${a_1}^2 - 4a_2a_0 > 0$ entonces los valores de x son reales y distintos, si ${a_1}^2 - 4a_2a_0 = 0$, entonces x tiene un solo valor y si ${a_1}^2 - 4a_2a_0 < 0$ no existen valores de x dentro del conjunto de los reales, es decir no hay intersecciones con el eje x y por lo tanto no hay soluciones reales.

Vértice. - es el punto más bajo o alto de la parábola y se puede encontrar mediante.

$$x_v = \frac{-a_1}{2a_2}$$

$$y_v = f\left(\frac{-a_1}{2a_2}\right)$$

También se puede utilizar los valores de x para encontrar el vértice.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_v = f(x_{\mathrm{v}})$$

La importancia del vértice radica en poder expresar la parábola en función de estos valores.

$$\boldsymbol{f(x) = a(x + x_v)^2 + y_v}$$

Al observar la gráfica 36, se determina que el dominio de la función cuadrática son los reales y el rango corresponde al conjunto de números $y \geq y_v$ si $a_2 > 0$ o $y \leq y_v$ si $a_2 < 0$.

Al ser la ecuación cuadrática un caso particular de las funciones polinómicas y al poseer las características particulares mencionadas, dentro de sus aplicaciones se pueden evidenciar situaciones de optimización que pueden ser de costos y demandas al considerar los máximos y mínimos, áreas, trayectorias parabólicas entre otros (Villarraga, 2012).

3.1.1.2.2 Función Cúbica

Las funciones cúbicas son funciones polinomiales de tercer grado.

Definición

Es una función polinomial de grado tres, tiene la forma:

ISBN: 978-987-82912-7-7

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

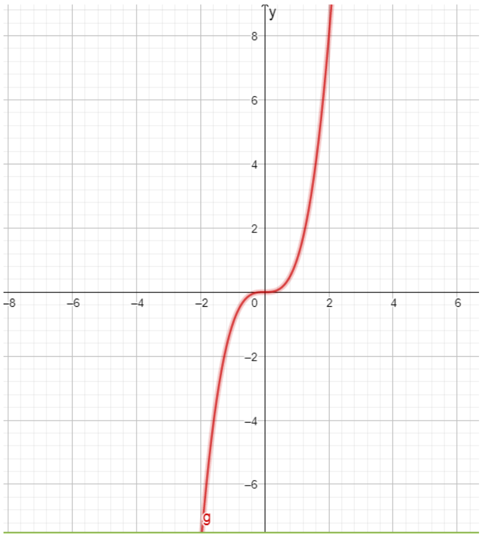
Donde $a_3 \neq 0$ y $n = 3$

También puede ser escrita de la forma:

$$f(x) = \mathrm{a}(x + b)^3 + c$$

Donde: $a \neq 0$

La grafica 37, muestra una función cubica, como se puede observar al ser una función polinomial el dominio son todos los reales y el rango de igual manera.



Gráfica 37. Función cúbica

Una función polinómica de orden superior diferente a las que se han presentado en este apartado tiene el grado del polinomio en *n* y es el coeficiente de mayor grado, además, a_n es su coeficiente principal.

3.1.2 Función racional

Una función racional está definida como el cociente de polinomios en los cuales el denominador tiene un grado por lo menos de 1 (existe variable en el denominador).

$f(x) = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+..+b_nx^m} = \frac{p(x)}{q(x)}$

Donde:

$q(x) \neq 0$

$\boldsymbol{Dom(f)} = \boldsymbol{R}$- *{elementos que anulan el denominador}*

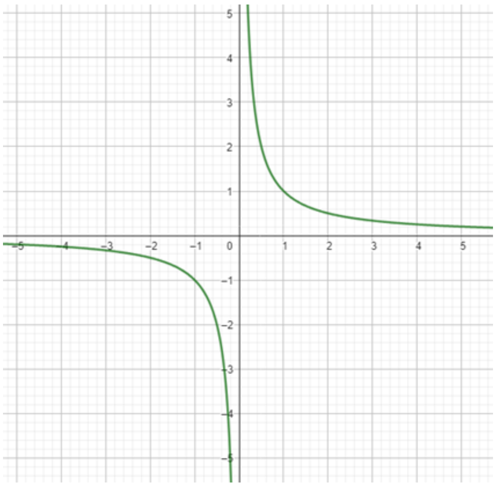
Proporcionalidad inversa

Una función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. Su expresión es de la forma:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Con $k \neq 0$, donde k es la constante de proporcionalidad inversa de y respecto de x. Como se puede observar en la gráfica 38, de una función de proporcionalidad inversa es una hipérbola.



Gráfica 38. Función proporcionalidad inversa

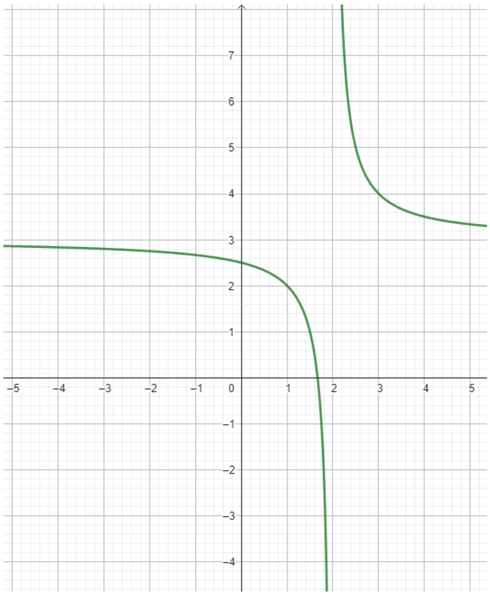
Al realizar un análisis visual de la gráfica se puede observar que el dominio corresponde a: $\boldsymbol{Dom(f)} = \boldsymbol{R}$- *{0}, c*on $x \in R$.

Función racional trasladada

Esta corresponde a una función racional, pero su centro no corresponde al origen, sino que se ha trasladado un valor c respecto al eje y y un valor de b respecto al eje x. Se representa en forma general por la ecuación:

$$f(x) = \frac{a}{x-b} + c$$

La grafica 39, presenta la curva de la funcion racional trasladada en forma general.



Gráfica 39. Función racional trasladada

ISBN: 978-987-82912-7-7

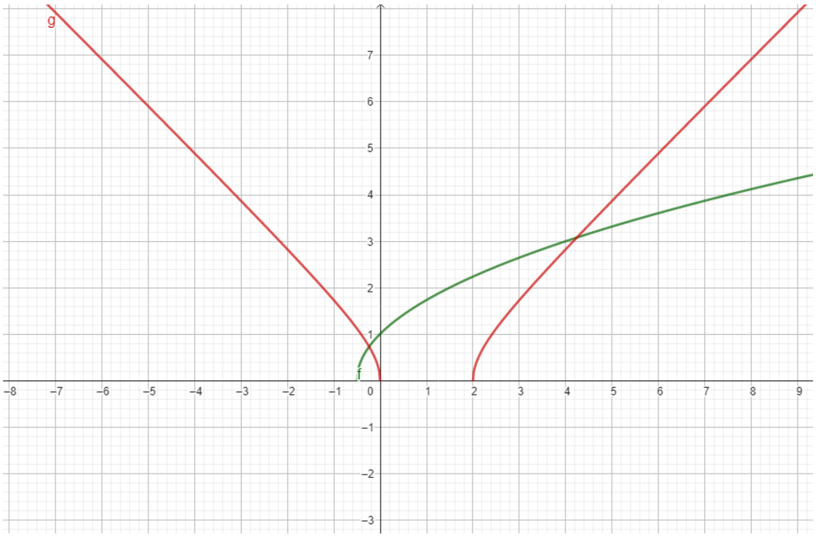
De igual manera, que en la función proporcional inversa al ser una función racional su dominio se restringe a que no se elimine el denominar porque no hay división para cero, entonces: $\boldsymbol{Dom(f)} = \boldsymbol{R}$- $\{b\}$. Por lo tanto: $x - b \neq 0$, entonces: $x \neq b$.

3.1.3 Función radical

Las funciones radicales son aquellas en las que la variable se encuentra bajo el signo radical. Su dominio los valores donde el valor interno del radical par sea mayor que o igual que cero. De forma general se puede representar con la ecuación:

$$f(x) = \sqrt[n]{\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+..+b_nx^m}} = \sqrt[n]{\frac{p(x)}{q(x)}}$$

En la gráfica 40, se presentan dos ejemplos de curvas de funciones racional, y sigue de la siguiente manera:



Gráfica 40. Función racional trasladada

En la grafica 40, se presentan dos grafica de funciones radicales, la que esta dibujada con verde corresponde a la funcion radical $f(x) = \sqrt{2x+4}$, si se realiza una exploracion visual se puede observar que dominio de la funcion enmpieza en aproximadamente [-0.5, ∞] y el rango desde [0, ∞].

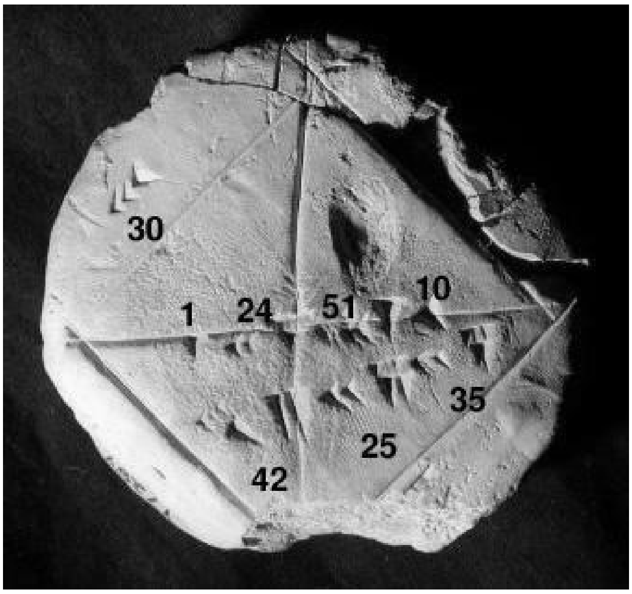
La curva de color rojo correspone a la funcion radical $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, como se puede observar el dominio corresponde a todos los reales menos el intervalo [0,2], y respecto al rango desde [0, ∞].

¿Para qué sirven, en las raíces cuadradas?

El cálculo de áreas es necesario en la agricultura, y lleva a la obligación de resolver ecuaciones de segundo grado y esto requiere del cálculo de raíces cuadradas, lo que los

ISBN: 978-987-82912-7-7

babilonios hace unos 4000 años ya sabían, por eso diseñaron un método algorítmico para extraer raíces, como se encuentra en las tablillas en las que escribían como la Gráfica 41.



Gráfica 41. Aproximación a la raíz cuadrada de 2 en una tablilla babilónica

Hace unos 3500 años, los antiguos egipcios lo practicaron en sus papiros, y aproximadamente 2500 años atrás, los matemáticos indios también lo llevaron a cabo. Posteriormente, los árabes mejoraron este proceso y es importante recordar que resolver ecuaciones de grado superior a 2 fue uno de los mayores desafíos en Italia durante los siglos XV y XVI. Algunos nombres notables que contribuyeron a este campo son Cardano, Tartaglia y Scipione del Ferro. Además, el símbolo de la raíz cuadrada fue introducido en 1525 por el matemático alemán Christoph Rudolff (Madridmas, 2019).

3.1.4 Función a trozos

Una función definida a trozos es una función cuya definición cambia según el valor que toma la variable. También, recibe el nombre de función definida por partes, función segmentada y función seccionada, entre otros. Se pude expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & , \ x \epsilon I_1 \\ g(x) & , \ x \epsilon I_2 \end{cases}$$

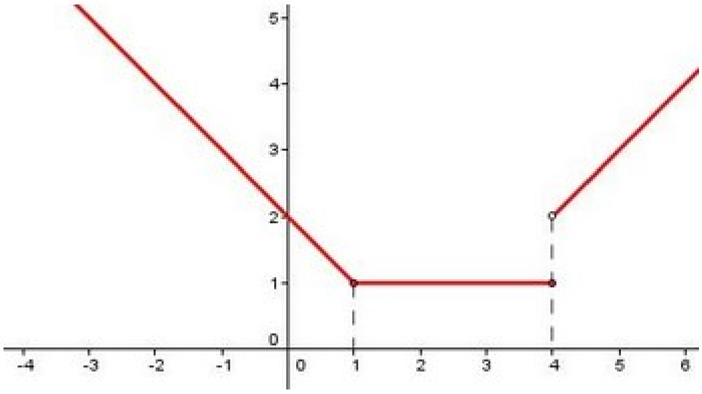
Al hablar del dominio de la función por partes es: $Dom(f) = donde\ se\ encuentra\ definida\ la\ funcion$

A continacion se presenta un posible ejemplo de un gráfico de este tipo de función considerando que $h(x)$ y $g(x)$ puede ser cualquier función elemental. En este caso particular queda como:

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, si\ x\epsilon(-\infty, 1) \\ 1, si\ x\epsilon(1,4) \\ x - 2, si\ x\epsilon(4, \infty) \end{cases}$$

La grafica 42, representa la ecuación descrita.



Gráfica 42. Función a trozos

3.2 FUNCIONES TRASCENDENTES

Estas funciones no se satisfacen una ecuación algebraica y no pueden ser expresadas en términos de una secuencia infinita de operaciones algebraicas de suma, resta y extracción de raíces, esta función que trasciende al álgebra es decir es independiente en un sentido algebraico de dicha variable.

Definición:
Son aquella cuya variable contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas.
Son ejemplos de funciones trascendentes el logaritmo y la función exponencial más asociadas a una variación en progresión geométrica como el crecimiento poblacional, también este término se utiliza para describir a las funciones trigonométricas como son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante, y cosecante.

3.2.1 Función Exponencial

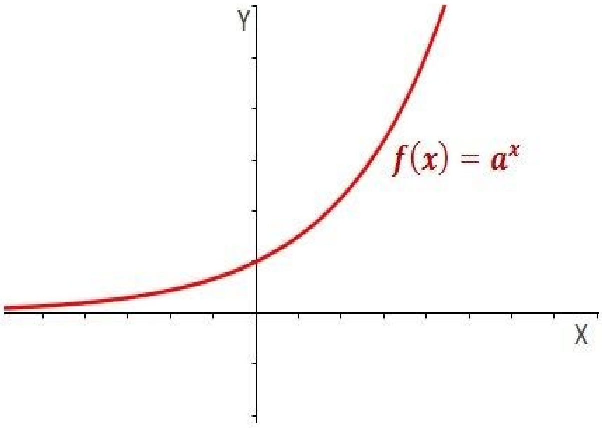
En este apartado se explora las funciones exponenciales, que se utilizan, entre otros aspectos, para modelar patrones de crecimiento como los que se encuentran en las bacterias. También se estudian las funciones logarítmicas, que guardan estrecha relación con las funciones exponenciales, ambos tipos de funciones tienen numerosas aplicaciones en el mundo real a la hora de modelar e interpretar datos (OpenStax, 2023).

Una función exponencial es aquella en que la variable independiente x aparece en el exponente y tiene de base una constante a. La ecuación general de esta función es:

$$f(x) = a^x$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

La grafica 43, muestra la representación gráfica de este tipo de función.



Gráfica 43. Función exponencial

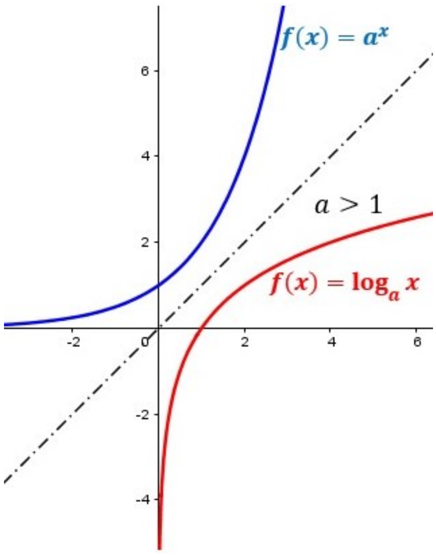
Es importante indicar que: $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$, cómo se puede observar su dominio es $Dom(f) = R$ y el rango $Rang(f) = R^+$.

3.2.2 Función Logarítmica

La función exponencial puede considerarse como la inversa de la función logarítmica. Y se escribe en forma general como:

$$f(x) = log_a x$$

En la Gráfica 44, se presenta la curva que corresponde a esta función.



Gráfica 44. Función logarítmica

Se debe considerar que $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$, bajo esta condición el dominio es $Dom(f) = R^+$ y el $Rang(f) = R$.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Además, de lo anteriormente menciona se debe considerar que:

$\nexists \log_{-a} x$

$\nexists \log_{a} (-x)$

$\nexists \log_{a} 0$

$\log_{a} a = 1$

$\log_{a} 1 = 0$

$\log_{a} a^{n} = n$

3.2.3 Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas son funciones matemáticas que describen las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo, son esenciales en el modelado matemático porque aparecen en muchos fenómenos naturales, en la ciencia y la ingeniería en general como la física, la ingeniería eléctrica, la acústica, la estadística y muchos otros.

Las funciones trigonométricas, se utilizan para modelar fenómenos periódicos y oscilatorios, como las ondas, las vibraciones y los movimientos armónicos. También se utilizan para modelar la rotación y el movimiento circular, como en la mecánica celeste y la ingeniería mecánica (Sterling, 2014).

Una función trigonométrica, también es llamada circular, se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; y tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etcétera (Euskadi, 2022).

Definición:

$$Función\ trigonométrica\ = \{(x, y)/FT(x)\}$$

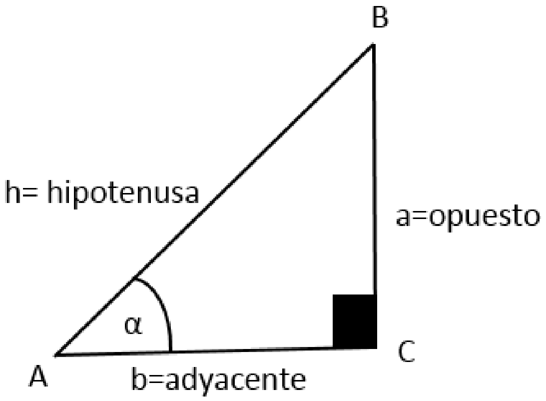
Donde:

FT, es una razón trigonométrica: seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente, arco coseno, etcétera.

$$f(x) = \{(x, y/y = sen(x)\}$$

La gráfica 45, muestra la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo.

ISBN: 978-987-82912-7-7



Gráfica 45. Triángulo rectángulo

A continuación, se describen la relaciones trigonométricas, considerando sus lados y sus ángulos.

Relaciones trigonométricas fundamentales:

$$sen(\alpha) = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{h}$$

$$cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{h}$$

$$tg(\alpha) = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{a}{b}$$

Relaciones trigonométricas recíprocas:

$$csc(\alpha) = \frac{hipotenusa}{opuesto} = \frac{h}{a}$$

$$sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{adyacente} = \frac{h}{b}$$

$$csc(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

Para el cálculo de un lado desconocido en un triángulo rectángulo se puede hallar mediante el teorema de Pitágoras.

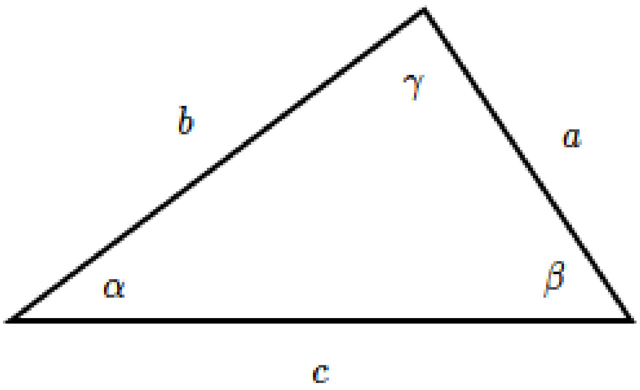
Definición:

En todo triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa. Se describe por la siguiente ecuación:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Ahora, que sucede si lo que se tiene es un triángulo que no es rectángulo o también conocido como oblicuángulo como el que se muestra en el grafico 46, para ello se aplica la le y de senos y cosenos.



Gráfica 46. Triángulo oblicuángulo

Si se conoce los ángulos y un lado se puede aplicar la ley de los senos que se determina por la relación:

$$\frac{a}{sin\ (\alpha)} = \frac{b}{sin\ (\beta)} = \frac{c}{sin\ (\gamma)}$$

Y por el contrario si lo que se conoce son dos lados y un ángulo se puede aplicar la ley de lo cosenos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\ (\gamma)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\ (\beta)$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bccos\ (\alpha)$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

CAPÍTULO 4:

4 SOFTWARE PARA ANÁLISIS VISUAL DE FUNCIONES

La información es fundamental para gestionar un proceso y mejorar su rendimiento, pues no se puede mejorar lo que no se gestiona, ni gestionar lo que no se controla, ni controlar lo que no se mide.

Con el avance de la ciencia y la informática en la era moderna las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) han incursionado en las diversas áreas del conocimiento y la agronomía no ha sido la excepción. En este sentido las herramientas informáticas permiten la automatización de cálculos, acortando los tiempos permitiendo al ingeniero tener resultados que puedan permitirle la valoración de datos que le conlleven a la mejor decisión.

El análisis visual de las funciones matemáticas es una poderosa herramienta para la toma de decisiones en la agronomía para entender y predecir el comportamiento de los cultivos en diferentes condiciones ambientales y manejo agronómico. Las gráficas permiten visualizar rápida y fácilmente las relaciones entre las variables que afectan el crecimiento de los cultivos, como la cantidad de agua, nutrientes, luz y temperatura. Con esto el ingeniero agrónomo puede identificar las variables críticas que deben ser monitoreadas y ajustadas para conseguir un crecimiento óptimo de los cultivos.

Además, el análisis visual de funciones también permite la comparación de diferentes estrategias de manejo agronómico para determinar la más eficiente y rentable. Al graficar diferentes funciones, se pueden comparar los rendimientos de los cultivos bajo diferentes condiciones y así identificar los factores más importantes que afectan el crecimiento de los cultivos (Van, 2006).

Para el análisis visual de funciones matemáticas existen varios programas de software, cada uno tiene sus propias fortalezas y debilidades, su elección depende del tipo de análisis que se desee realizar y de las preferencias del usuario, a continuación, se mencionan algunos:

1. MATLAB: software de análisis numérico que incluye herramientas para graficar funciones y analizar datos. Permite crear gráficos 2D y 3D de funciones matemáticas,

ISBN: 978-987-82912-7-7

además tiene una amplia gama de herramientas para ajustar y personalizar los gráficos.

2. Mathematica: software de cálculo simbólico y numérico, permite crear gráficos 2D y 3D de funciones matemáticas, contiene una amplia gama de opciones para ajustar y personalizar los gráficos.
3. GeoGebra: software de geometría dinámica, permite crear gráficos 2D y 3D de funciones, puede ajustar y personalizar los gráficos.
4. GNU Octave: software de cálculo numérico, realiza graficas 2D y 3D de funciones, también permite personalizar los gráficos.
5. Excel: a pesar de que no es un software específico para el análisis visual de funciones y se utiliza generalmente en la industria y en la investigación para graficar y analizar datos, también crea gráficos 2D y 3D de funciones matemáticas y a la vez las ajusta y personalizar los gráficos.

A pesar de las bondades que ofrecen estos softwares para propósito de uso en el análisis de los problemas y soluciones en el área de la agronomía propuestos en este libro, se describirán GeoGebra por ser de fácil uso, además de ser gratuito y Excel porque es una herramienta poderosa para el ingeniero agrónomo gracias a sus funciones incorporadas y simplicidad.

4.1 USO DE EXCEL PARA ANÁLISIS DE FUNCIONES EN AGRONOMÍA

Como ya se mencionó en el apartado anterior Excel es una herramienta muy versátil para el uso cotidiano del ingeniero agrónomo debido a su capacidad para manejar grandes cantidades de datos, crear gráficos y realizar análisis estadísticos, sin embargo, en esta sección se va a describir su uso para el análisis de funciones en agronomía. A continuación, se describen algunos ejemplos de su uso:

Para analizar el crecimiento de los cultivos a lo largo del tiempo, se pueden introducir los datos de crecimiento en una hoja de cálculo de Excel y realizar un análisis de regresión para modelar la tasa de crecimiento, crear los gráficos de crecimiento para visualizar los cambios en el tiempo.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Para analizar el rendimiento de los cultivos, incluyendo la producción de frutos y semillas, se pueden generar gráficos temporales del rendimiento de la producción de los cultivos, además se puede utilizar fórmulas para calcular el rendimiento promedio.

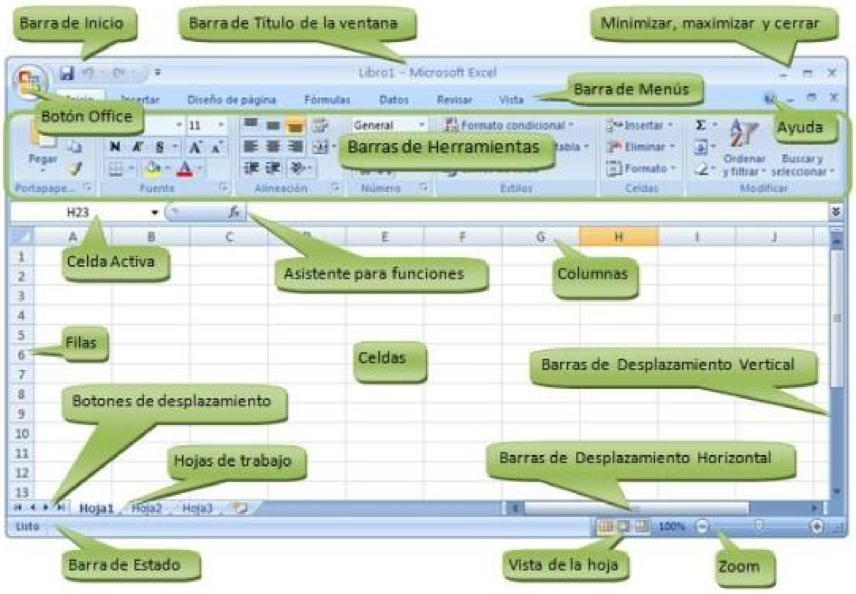
Para analizar los datos de los suelos, incluyendo los niveles de nutrientes y la textura del suelo, se pueden utilizar fórmulas para calcular los promedios y desviaciones estándar y crear gráficos para visualizar un análisis visual de los datos de suelos.

Para analizar los datos climáticos como temperatura, precipitación y humedad relativa, aprovechando la ventaja del uso de fórmulas para calcular los promedios y desviaciones estándar, además de elaborar gráficos para análisis de los datos climáticos y realizar la toma de decisiones.

Se han mencionado pocas aplicaciones de Excel en la agricultura a modo de ejemplificar su uso, pero existen muchos más, en este contexto se mencionan otros como los modelos de crecimiento de plantas a los datos de crecimiento y temperatura, calcular las tasas de crecimiento relativas para evaluar las respuestas de las plantas al cambio de temperatura (Fang, 2020).

4.1.1 Interfaz de Excel

Antes de empezar a dibujar la función en Excel es importante presentar su interfaz descrita en la gráfica 47. Partes de Excel, se presenta cada parte etiquetada con su nombre a los cuales posteriormente se hará referencia para el trazo de funciones con este software.



Gráfica 47. Partes de Excel
Fuente:(Just EXW, 2022)

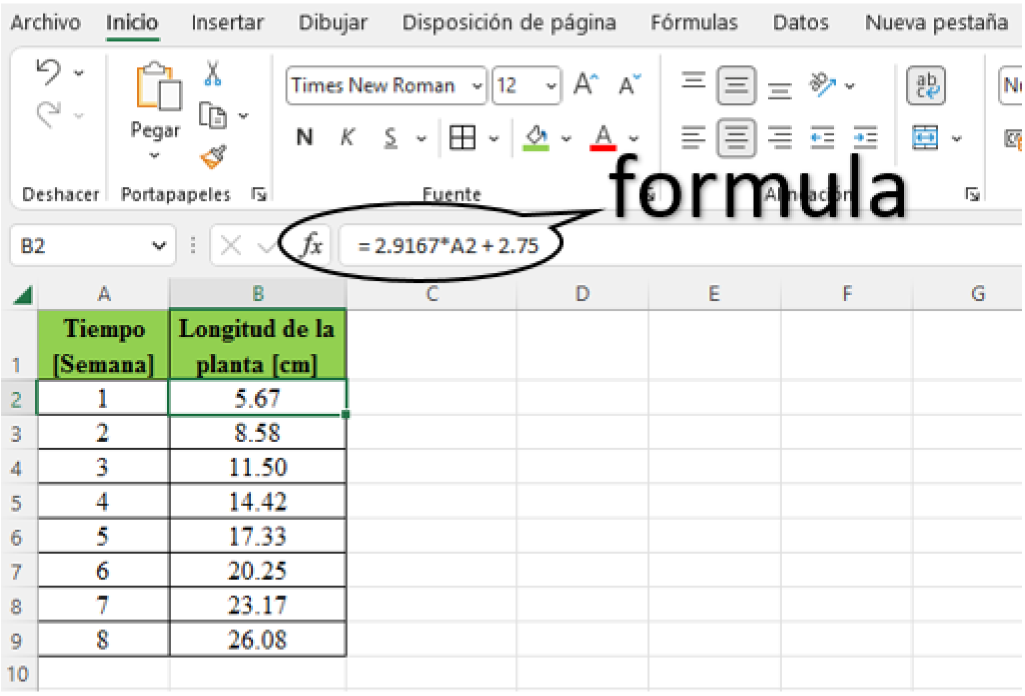
ISBN: 978-987-82912-7-7

4.1.2 Recomendaciones para la elaborar de graficas en Excel

Los pasos descritos a continuación se recomiendan para crear gráficas efectivas y fáciles de interpretar en Excel. Se va a explicar con un ejemplo de aplicación común de las gráficas en la agricultura que es el monitoreo del crecimiento de los cultivos a lo largo del tiempo.

Se desea graficar el crecimiento de una planta de tomate en función del tiempo, su crecimiento está dado por la función lineal $y = 2.9167x + 2.75$. Para ello considere que las medidas del tamaño de la planta están dadas en centímetros (cm), estos deben ser medido cada semana durante 8 semanas.

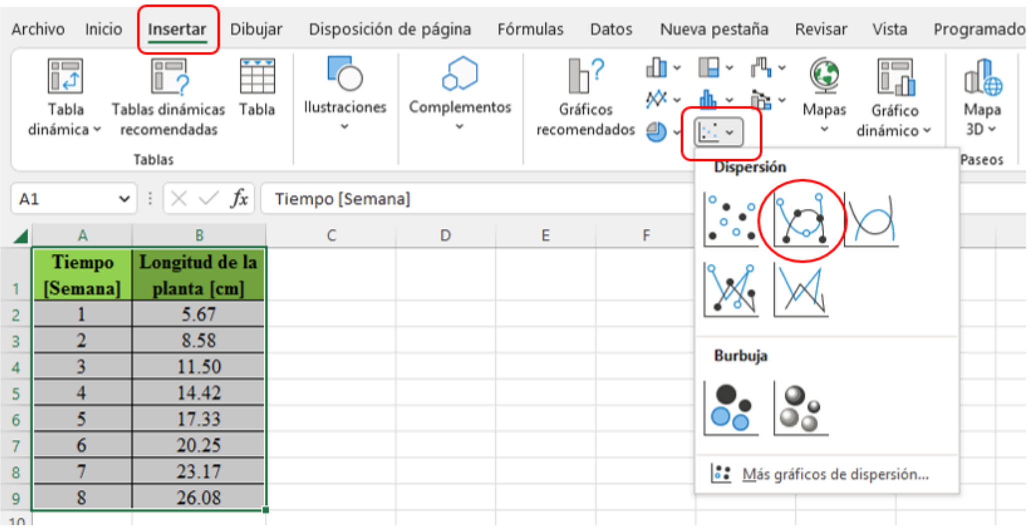
1. Se crea una tabla con dos columnas (columna A para tiempo y B para el crecimiento). En la primera columna, en A1 se coloca el título de la columna y entre corchetes las unidades en que mide (Tiempo [Semana]), esta describe los valores de tiempo desde 1 hasta 8 semanas con incrementos de 1. En la segunda columna, en B1 se coloca el título de la columna y entre corchetes las unidades en que mide (Longitud de la planta [cm]), describe los valores correspondientes a $f(x) = y$, que son los resultados de la función de crecimiento $y = 2.9167x + 2.75$.
2. En la Gráfica 48. Formulas en Excel, se puede observar cómo quedaría la tabla y que a partir de la celda B2 se debe escribir la fórmula para evaluar la función.



Gráfica 48. Formulas en Excel

ISBN: 978-987-82912-7-7

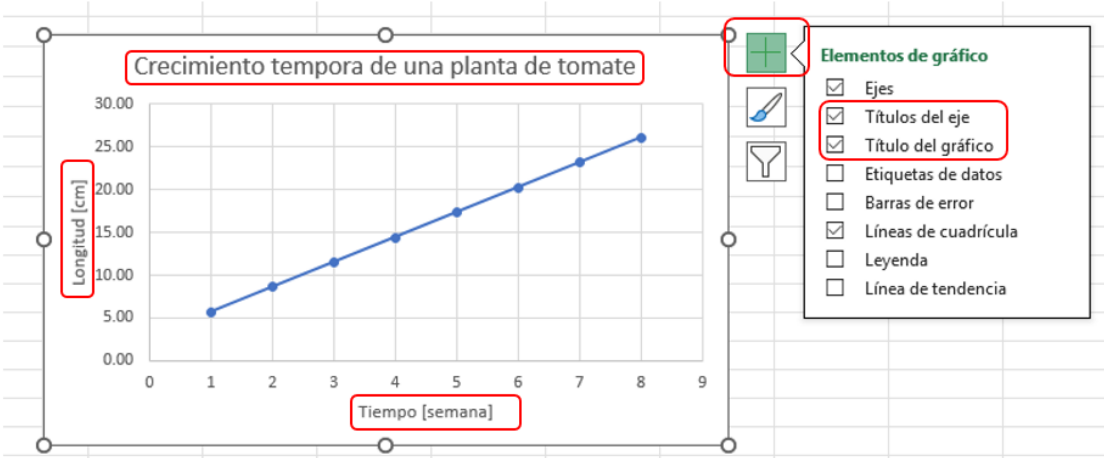
3. A continuación, para la elaboración de la gráfica en Excel, se selecciona los datos de la tabla, incluyendo las etiquetas de las columnas.
4. Es importante seleccionar el tipo de gráfico adecuado para que permita el análisis de este fenómeno descrito por la función lineal. Para eso se hace clic en la pestaña "Insertar" en la barra de herramientas de Excel.
5. En la sección "Gráficos", se elige el tipo de gráfico que deseas crear. Para este ejemplo, elegiremos "Gráfico de líneas", como se muestra en el grafico Gráfica 49. Menú insertar gráficos.



Gráfica 49. Menú insertar gráficos

6. Se creará una nueva gráfica en la hoja de cálculo como se puede observar en la gráfica 50. Insertar títulos a los ejes. Se puede personalizar la apariencia de la gráfica utilizando las herramientas de diseño y formato en la pestaña dando clic en el + (Elementos de gráfico) que aparece en lado superior derecho de la gráfica.
7. Es indispensable asegurar que la gráfica tenga etiquetas para los ejes y un título descriptivo que indique claramente lo que se está graficando. Esto facilitará la interpretación de la gráfica por parte de los usuarios. Para esto seleccionar título del eje y título de gráfico como se indica en la gráfica. Utilice colores y estilos apropiados y fáciles de interpretar. Se debe evitar el uso de colores brillantes o demasiado oscuros que puedan dificultar la visualización de los datos.

ISBN: 978-987-82912-7-7



Gráfica 50. Insertar títulos a los ejes

De ser necesario:

8. Puede ajustar los ejes, asegúrese de que los ejes de la gráfica se ajusten adecuadamente a los valores que se están graficando. Por ejemplo, si los valores de los datos son pequeños, asegúrate de que el eje no tenga una escala demasiado grande que haga que la gráfica se vea muy plana.

9. Agregar formato y estilo a la gráfica, utilice herramientas de diseño y formato de Excel para agregar elementos a la gráfica, como sombras, bordes y efectos 3D. Sin embargo, asegúrate de que estos elementos no distraigan la atención de los datos que se están graficando.

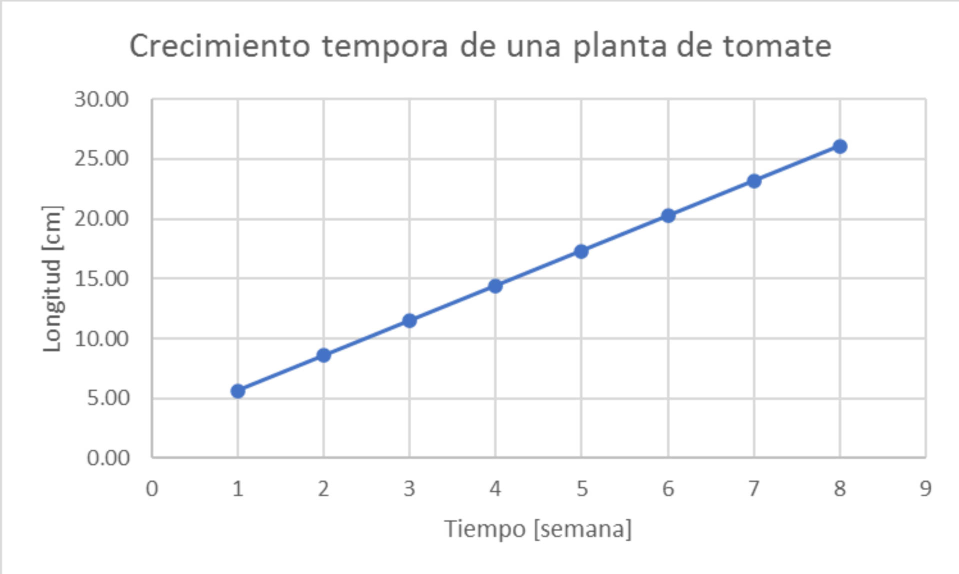
10. Actualice las gráficas de forma dinámica, si los datos cambian con frecuencia, utiliza las herramientas de Excel para actualizar las gráficas de forma dinámica. Esto facilitará la actualización de las gráficas sin tener que crear nuevas gráficas cada vez que se actualicen los datos.

11. Y por último guarde la gráfica con clic derecho sobre la misma y selecciona "Guardar imagen como" para guardarla en tu computadora.

4.1.3 Análisis visual de funciones con Excel

La gráfica de una función en Excel permite un análisis visual de lo que está sucediendo, por lo que puede ser una herramienta muy útil en la agricultura para visualizar la relación entre diferentes variables y ayudar en la toma de decisiones para el manejo de los cultivos.

ISBN: 978-987-82912-7-7



Gráfica 51. Crecimiento temporal de una planta de tomate

Ahora se analiza visualmente la gráfica 51. Crecimiento temporal de una planta de tomate, para determinar si hay alguna relación entre el tiempo transcurrido y el crecimiento de la planta de tomate. En este caso, la gráfica muestra claramente que hay una relación lineal positiva entre las semanas del cultivo de tomate y el crecimiento de este. A medida que aumenta el tiempo semanal, también aumenta el crecimiento de la planta de tomate.

4.2 USO DE GEOGEBRA PARA EL ANÁLISIS DE FUNCIONES EN AGRONOMÍA

GeoGebra

GeoGebra es una herramienta matemática gratuita que ofrece la posibilidad de asociar objetos geométricos y algebraicos para resolver problemas complejos, relacionando ambas áreas de conocimiento. Se puede utilizar para el análisis de funciones en agronomía ya en general, es una herramienta útil gracias a su capacidad para crear gráficos, realizar análisis estadísticos y modelar sistemas complejos (Ozturk, 2020). A continuación, se presenta algunos ejemplos de su uso:

1. Para analizar la relación entre dos variables, como la cantidad de agua y el crecimiento de las plantas. Se pueden crear gráficos de dispersión para visualizar la relación y utilizar la función de ajuste de curvas para encontrar la mejor línea de ajuste.

ISBN: 978-987-82912-7-7

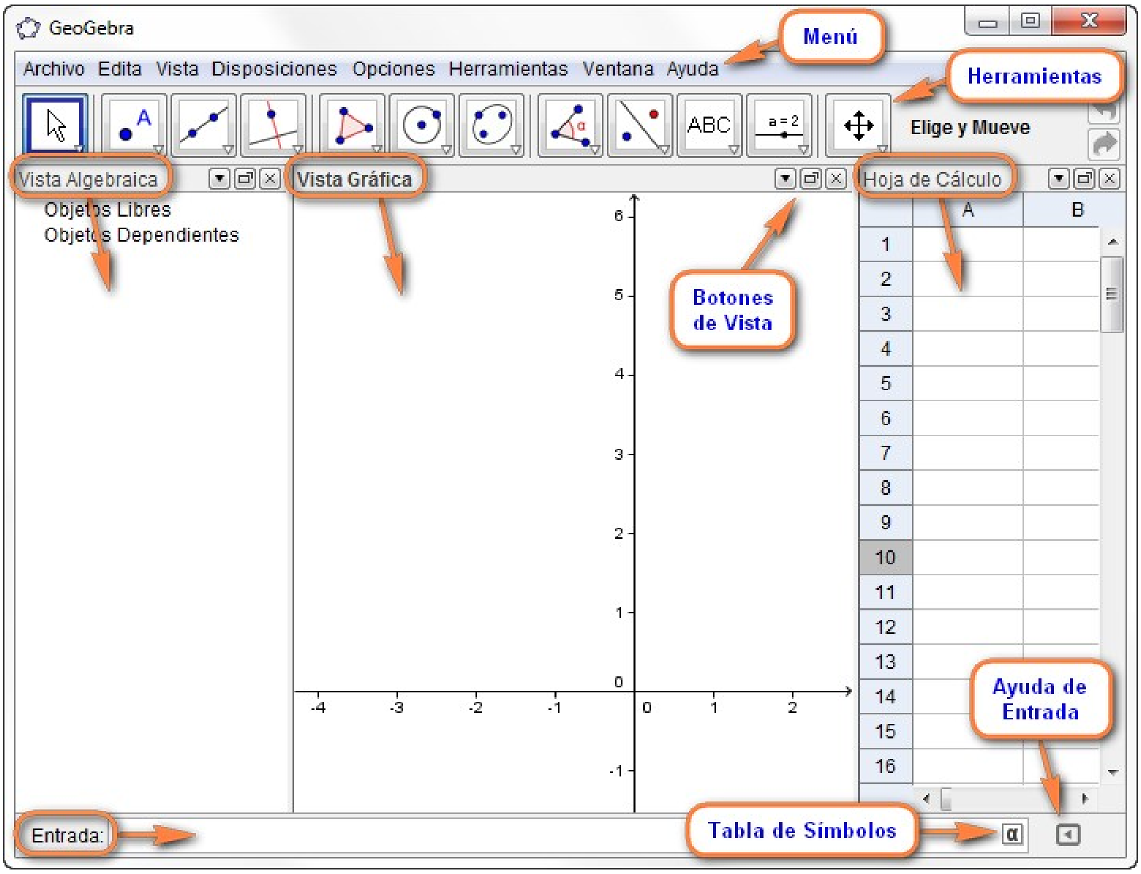
2. Para analizar los datos de suelo, como la textura, la densidad y el contenido de humedad. Se pueden crear gráficos para visualizar los datos y utilizar la función de regresión para encontrar las relaciones entre las variables.

3. Para analizar los sistemas de cultivo, como la rotación de cultivos y la interacción de plantas. Se pueden crear gráficos para visualizar la dinámica del sistema y utilizar la función de análisis de sistemas dinámicos para evaluar la estabilidad y la resiliencia del sistema.

4. Para analizar la respuesta de las plantas al estrés abiótico, como la sequía y el frío. Se pueden crear gráficos para visualizar la respuesta de las plantas y utilizar la función de ajuste de curvas para encontrar la mejor ecuación de respuesta.

4.2.1 Interfaz de GeoGebra

Para poder realizar gráficas de funciones en GeoGebra es necesario conocer su interfaz, esta se describe en la Gráfica 52. Partes de GeoGebra, muestra sus partes y las etiqueta con su nombre a los cuales posteriormente se hará referencia para el trazo de funciones con este software.



Gráfica 52. Partes de GeoGebra

ISBN: 978-987-82912-7-7

Fuente: (GeoGebra, 2022)

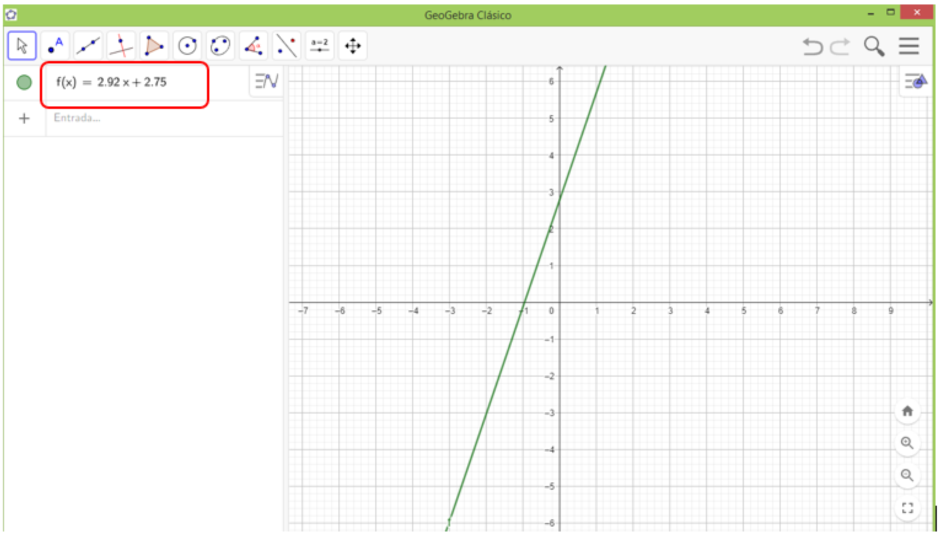
4.2.2 Elaboración de gráficas en GeoGebra

Al ser GeoGebra un software matemático interactivo este permite que los usuarios puedan crear gráficas y visualizaciones de manera sencilla y dinámica. A continuación, se presenta los pasos básicos para elaborar gráficas:

1. Abre GeoGebra y selecciona la vista de "Calculadora" en la barra de herramientas superior.

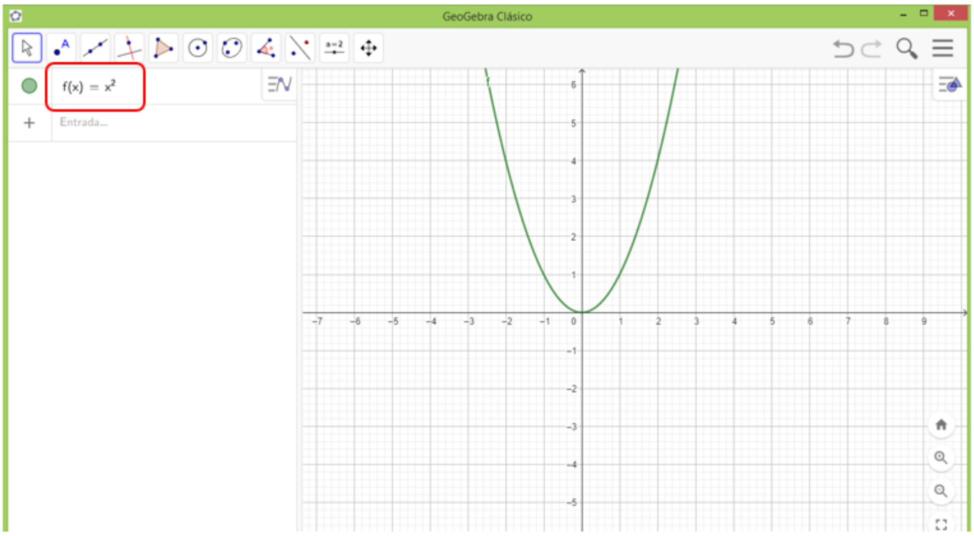
2. En la barra de entrada, escribe la función que deseas graficar. Por ejemplo, ecuaciones polinomiales como:

   Lineales: $y = 2.9167x + 2.75$ (Gráfica 53).



Gráfica 53. Trazo de función lineal en GeoGebra

Cuadráticas: $y = x^2$(Gráfica 54).

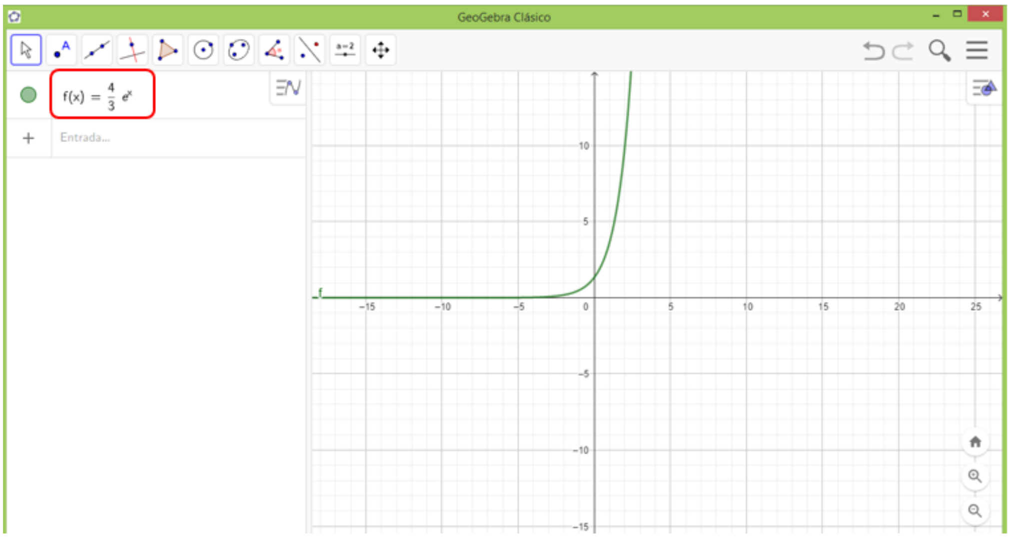


ISBN: 978-987-82912-7-7

Gráfica 54. Trazo de función cuadrática en GeoGebra

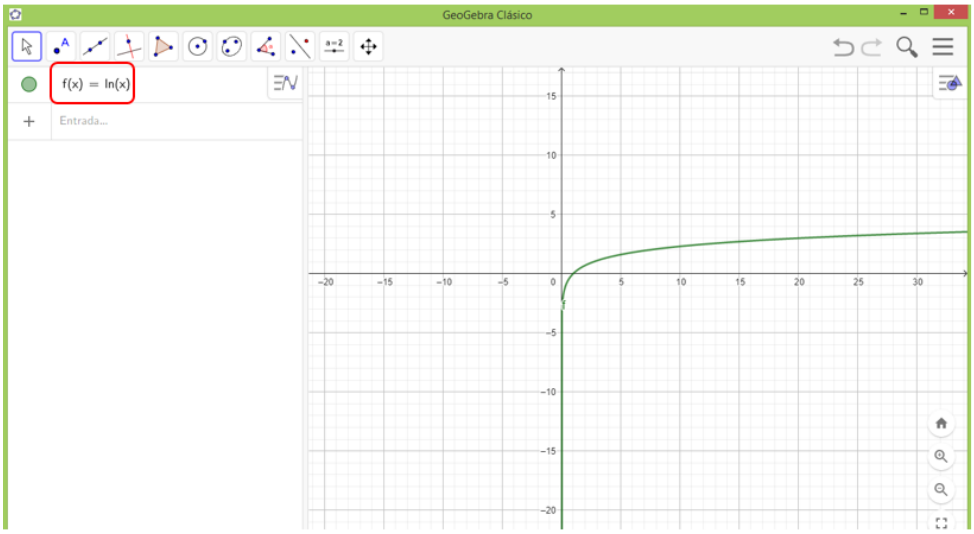
De igual manera se puede graficar cualquier función polinómica de grado n.

Otras graficas de interés a analizar son las funciones exponenciales: $y = \frac{4}{3}e^x$ (Gráfica 55.)



Gráfica 55. Trazo de función exponencial en GeoGebra

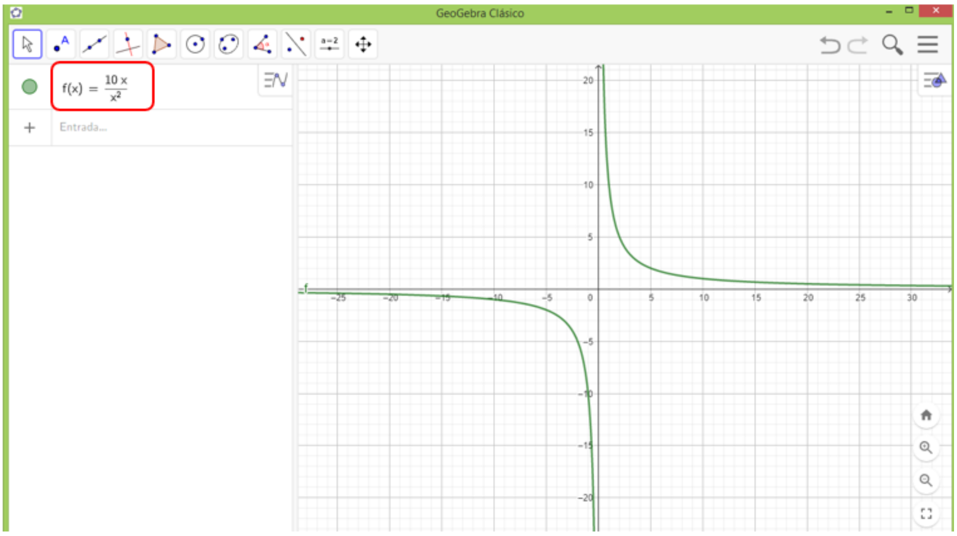
Y también las funciones se presenta un ejemplo para la gráfica de una función logarítmica: $y = ln\,(x)$ (Gráfica 56).



Gráfica 56. Trazo de función logarítmica en GeoGebra

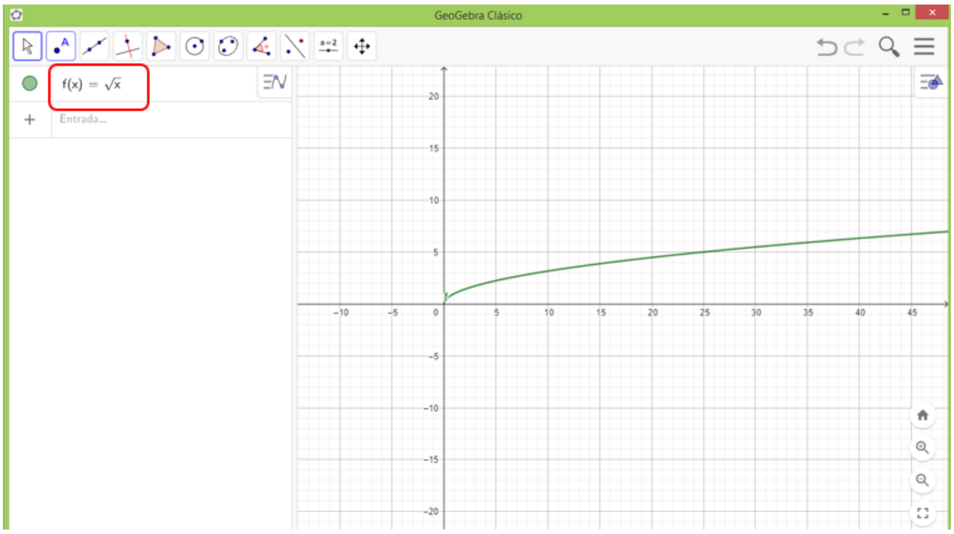
Para el modelado con funciones elementales también se consideran las racionales: $y = \frac{10x}{x^2}$ (Gráfica 57).

ISBN: 978-987-82912-7-7



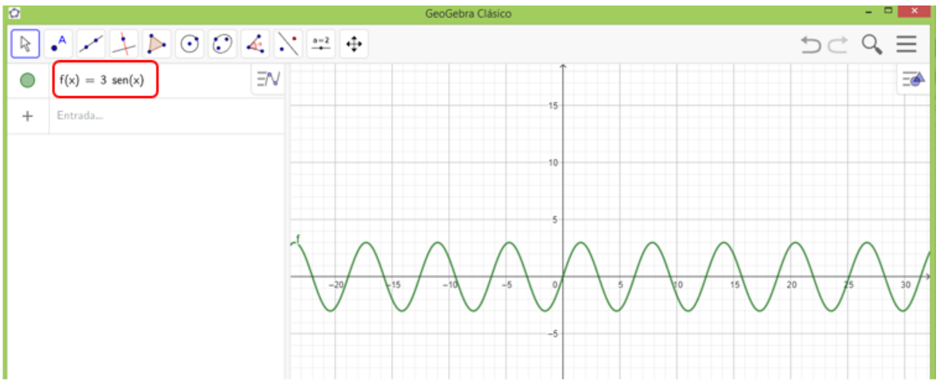
Gráfica 57. Trazo de función radical en GeoGebra

También se incluyen las funciones radicales: $y = \sqrt{x}$ (Gráfica 58).



Gráfica 58. Trazo de función radical en GeoGebra

Además, se utilizan las funciones trigonométricas como: seno ($y = sen(x)$) (Gráfica 59), coseno, tangente y las recíprocas.

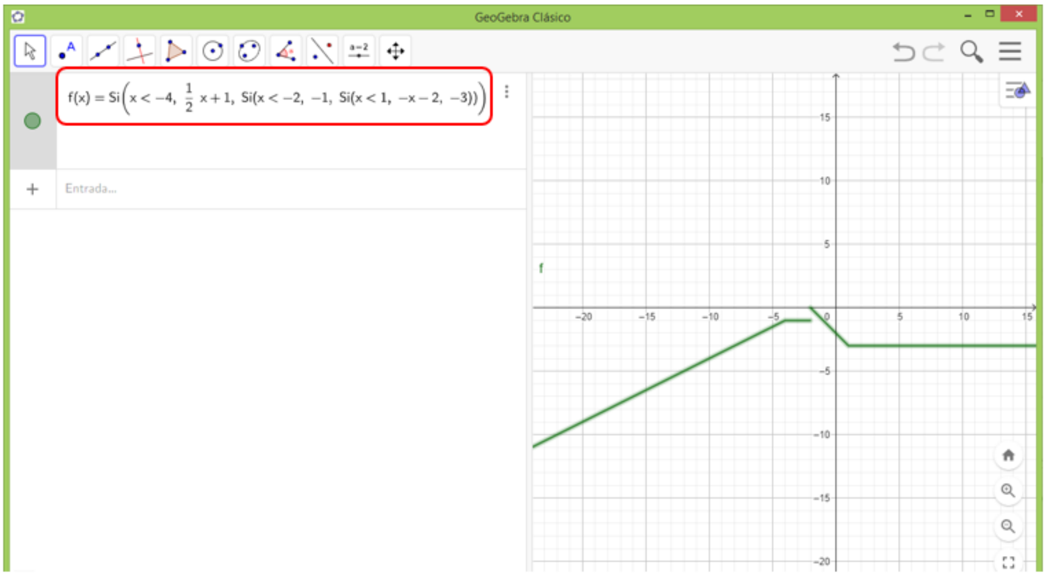


ISBN: 978-987-82912-7-7

Gráfica 59. Trazo de función trigonométrica-seno en GeoGebra

Y, por último, el trazo de las funciones a trozos que son de gran utilidad a la hora de expresar una función en diferentes intervalos en los que está definida. Para el ejemplo se dibuja la función a trozos (Gráfica 60):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x < -4 \\ -1, & -4 < x < -2 \\ -x - 2, & -2 < x < 1 \\ -3, & x > 1 \end{cases}$$

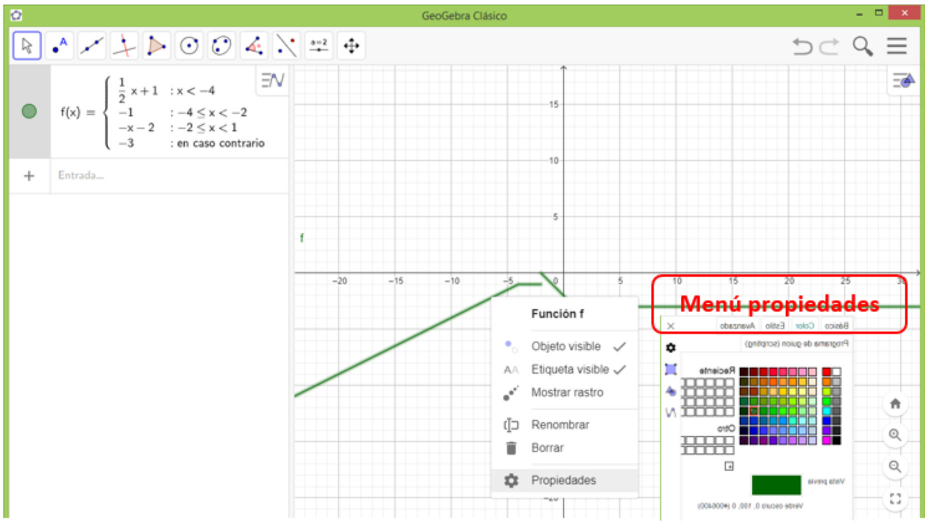


Gráfica 60. Código para trazo de función a trozos en GeoGebra

Como se puede observar en la gráfica 60. Código para trazo de función a trozos en GeoGebra, se utiliza la función **Si** para graficar los diferentes intervalos que componen la función por partes, cuya sintaxis es Si [<Condición>, <Entonces>], entonces la función descrita queda de la siguiente manera:

Si[x < -4, 1 / 2 x + 1, Si[x < -2, -1, Si[x < 1, -x - 2, -3]]]

3. Para personalizar la apariencia de la gráfica, haz clic derecho sobre la misma y selecciona "Propiedades" como se muestra en el gráfico Gráfica 61. Trazo de función a trozos en GeoGebra. Allí puedes ajustar las opciones de color, grosor de línea, tipo de línea, entre otras.



Gráfica 61. Trazo de función a trozos en GeoGebra

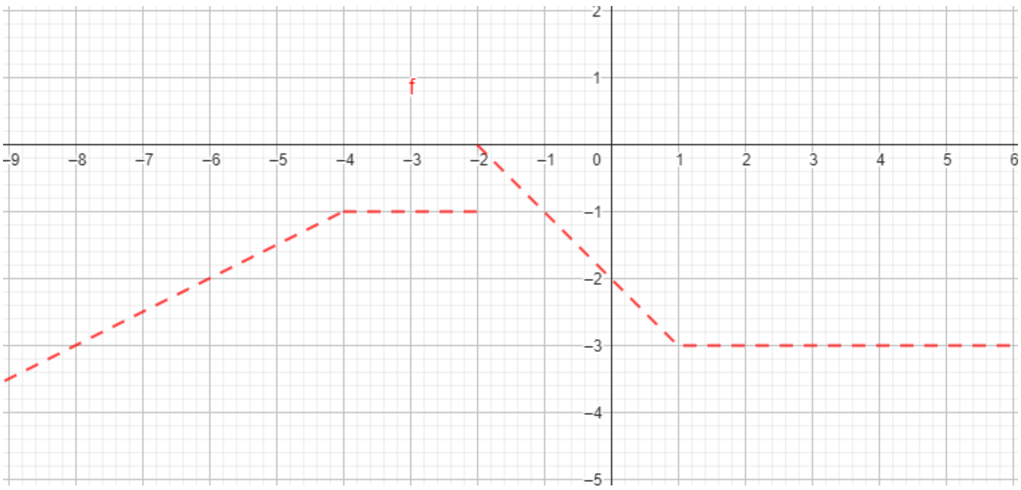
4. Para agregar más funciones a la gráfica, escribe una nueva función en la barra de entrada y presiona "Enter". GeoGebra automáticamente agregará la nueva gráfica en el mismo panel.

5. Puedes utilizar las herramientas de zoom y navegación en el panel de gráficos para explorar la gráfica en detalle.

6. Para guardar la gráfica, selecciona "Archivo" en la barra de herramientas superior y luego "Exportar". GeoGebra permite exportar la gráfica en diferentes formatos de imagen, como PNG o SVG.

4.2.3 Análisis visual de funciones con GeoGebra

En la gráfica 62. Trazo de función a trozos en GeoGebra, se muestra una función a trozo, en la cual se ha trabajado en la forma como se presenta la línea (color rojo y punteada) y posee también muestra el nombre de la función.



Gráfica 62. Trazo de función a trozos en GeoGebra

ISBN: 978-987-82912-7-7

La interpretación del análisis visual de una función a trozos en GeoGebra puede depender de la especificidad de la función en cuestión y los intervalos donde es discontinua o definida de manera diferente. Se pueden observar cuatro partes distintas de la función, una línea recta creciente, una recta constante en *-1*, una recta decreciente y otra recta constante en *-3*, separadas por una discontinuidad en $x = -2$. El análisis visual de la función puede incluir los siguientes aspectos:

Se observar los valores de $f(x)$para diferentes valores de *x* de la gráfica y se define el rango en $(-\infty, -1) - \{2\}$.

Se puede observar discontinuidad de salto finito de la función en $x = -2$.

En general, el análisis visual de una función a trozos en GeoGebra puede ayudar a los usuarios a entender mejor las diferentes partes de la función y su comportamiento en diferentes intervalos, lo que puede ser útil en la resolución de problemas y la toma de decisiones en la agricultura.

ISBN: 978-987-82912-7-7

CAPÍTULO 5:

5 MODELADO MATEMATICO

5.1 MODELADO

Un modelo es la representación simplificada de un sistema real, se representa la relación entre ellos mediante la describen las variables dependientes e independientes, características y restricciones mediante símbolos, diagramas y ecuaciones. Estos modelos se pueden usar para describir mediante la representan de los componentes del sistema o para simular e imitar el funcionamiento del sistema en este tipo de modelo se obtienen resultados predictivos que se puede presentar tanto en forma de datos numéricos como gráficos (Candelaria Martínez et al., 2011).

Los modelos se utilizan en diferentes áreas, lo que permite mejorar el conocimiento de las características y el funcionamiento de los fenómenos o elementos en estudio; así como conocer mejor el problema el planteado para tomar decisiones en la administración y uso de los componentes y recursos. En la agricultura tiene un gran protagonismo modelar sistemas en exploración mediante su representación, estudio y planeación con miras a una producción optimiza, eficiente y sustentable.

La agricultura es una actividad que articula conocimientos de varias áreas como las biológicas, económicas, sociales, culturales, humanas, políticas y de mercado; por lo tanto, los modelos deben lograr la representación y relacionarlas totalmente del sistema agricultura para una mejor evaluación y planificación de la agricultura.

5.1.1 Definición de un modelo

Un modelo puede ser una representación conceptual, numérica o gráfica de un objeto, sistema, proceso, actividad o pensamiento; destaca las características que el modelador considera más importantes del fenómeno en cuestión, por lo que se emplea para analizar exhaustivamente cada una de sus relaciones e interacciones, y con base en su análisis, predecir posibles escenarios futuros para dicho fenómeno. Así, un modelo puede describirse como una representación simplificada de un sistema real, y es en esencia, una descripción de entidades y la relación entre ellas (García, 2008). Por lo anterior, el modelado o modelaje puede considerarse como un método eficiente para reducir y entender la complejidad de los sistemas. Un modelo de simulación es un conjunto de ecuaciones que representa procesos, variables y relaciones entre variables de un fenómeno del mundo real y que proporciona indicios aproximados de su comportamiento

ISBN: 978-987-82912-7-7

bajo diferentes manejos de sus variables (Pérez et al., 2006); los cuales, permiten abordar una cuestión puramente teórica, en cuyo caso su finalidad es puramente teórica, o una situación real, orientado a dar una respuesta concreta, formalizar en un modelo de simulación nuestra percepción del fenómeno real y simular el efecto de diferentes alternativas.

Con el uso del modelaje se puede exagerar en la simplificación o en la adición de relaciones o cualidades que en realidad no existen, dependiendo del grado de conocimiento del modelador sobre el fenómeno en cuestión. un modelo es una representación esquemática de un sistema dinámico, que no llega a ser un duplicado de la realidad, sino que la simplifica exagerando y omitiendo rasgos. El modelaje no es algo nuevo, pues toda persona en su vida privada y en sus relaciones comunitarias usa modelos para tomar decisiones. Los modelos, al igual que cualquier herramienta empleada para procesar información, tienen como objetivos el mejorar el entendimiento sobre los sistemas en estudio para probar teorías científicas, predecir el resultado de una combinación de situaciones en el sistema, o controlar el sistema estudiado y producir resultados anticipados.

A pesar de las limitaciones que tiene el empleo de modelos de simulación en la investigación, como pudieran ser la falta de sistematización de la información, desconocimiento de relaciones entre elementos de los sistemas y la dificultad de integrar y hacer explícitos modelos de gran tamaño, facilita el estudio de los sistemas, principalmente los de tamaños menores y fenómenos específicos, aunque se están realizando importantes avances en el desarrollo de modelos multifactoriales y multidisciplinarios.

5.1.2 Modelado y simulación

El modelado y la simulación son dos técnicas relacionadas pero distintas en la ciencia y la ingeniería. El modelado es el proceso de crear un modelo matemático o conceptual que describe un sistema o proceso del mundo real. Este modelo se utiliza para analizar, predecir o entender el comportamiento del sistema o proceso en diferentes condiciones. Por otro lado, la simulación es el proceso de ejecutar el modelo en un entorno computarizado para producir resultados que reflejen el comportamiento del sistema en el mundo real.

El modelado y la simulación a menudo se utilizan juntos para resolver problemas complejos y para tomar decisiones informadas. El modelado permite a los investigadores

ISBN: 978-987-82912-7-7

y diseñadores desarrollar una comprensión más profunda del sistema o proceso, mientras que la simulación permite probar diferentes escenarios y condiciones para evaluar su impacto en el sistema o proceso (Sokolowski, 2018).

5.1.3 Tipos de modelos

Existen diferentes tipos de modelos, en función de la finalidad para la cual se crean o diseñan. Sus clasificaciones son variadas, y buscan dar una idea de sus características esenciales; pueden ser en base a su dimensión, función, propósitos y grado de abstracción. Cada fenómeno de la realidad se puede representar por medio de un modelo; por lo cual, según el número y tipo de fenómenos existentes en el mundo real, será el número y tipo de modelos posibles. Aunque los tipos básicos son icónico, analógico y simbólico o matemático. En este sentido, De Souza y González (2001) clasificaron a los modelos, según su propósito y el grado de extracción de la realidad (Cuadro 1).

Tabla 6. Tipos de modelos

Tipo	**Característica**
	Por el propósito
Descriptivos	Permite describir las características del fenómeno analizado, emplea la observación sistemática y participante, encuestas, entrevistas, estudios etnográficos, entre otros.
Explicativos	Permite conocer las causas que originan el fenómeno, generaliza más allá de los sujetos en estudio. Se basa en obtener muestras representativas de los sujetos, usa diseños experimentales para el control del experimento y análisis de datos.
Predictivos	Se basa en los anteriores y en técnicas como regresión múltiple, procesos etnográficos, estocásticos, simulación o análisis causal.
	Por grado de extracción de la realidad
Físicos	Aparatos biomédicos y cabinas espaciales
Escala	Prototipo de la célula y del sistema solar
Analógicos	Se representa la propiedad del objeto real por una sustituida, que se comporta de manera similar, se usa en entrenamiento y ayuda para la instrucción.
Interactivos	Escenarios predefinidos y juegos.
De entrada y salida	Simulación de mercados y sistemas de procesos estocásticos.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Lógicos	Se basa en la formulación de hipótesis, puede expresarse en forma de enunciado condicional entre dos proposiciones, que pueden o no ser válidas.
Matemáticos	Se basa en fórmulas funcionales para explicar los fenómenos del mundo real, es el modelo de mayor abstracción.

Fuente: De Souza & Gozalez (2001)

Existen otras clasificaciones, de acuerdo con el autor, por ejemplo (Quinteros et al., 2006), los determina en base a las capacidades de representar la dinámica y control de los componentes e interacciones del sistema de la siguiente manera:

- Modelos estáticos, cuando se representa un sistema en un solo instante de tiempo en particular, o también para representar un sistema en donde el tiempo no es importante, por ejemplo, simulación Montecarlo.
- Modelos dinámicos, representan sistemas en los que las variables son funciones del tiempo, permitiendo predecir su desarrollo en un periodo dado; es útil para representar procesos biológicos.
- Modelos determinísticos, no consideran la variación estocástica, comportándose de manera probabilística, los datos de entrada y las relaciones existentes en el sistema son especificados al inicio, con los resultados no son al azar.
- Modelos estocásticos, la modelación se realiza considerando que al menos una de las variables que definen el comportamiento del sistema se muestra aleatoria, y entonces el resultado es al menos en parte variable.

Es importante resaltar que los modelos lineales o estáticos no describen la dinámica de los procesos biológicos y físicos que ocurren en el sistema, y en los resultados no se incluye sus efectos e interacciones. Mientras que los modelos dinámicos, representan los procesos que se desarrollan en un sistema a través del tiempo y los integra en la representación de su comportamiento. También proporcionan una herramienta para evaluar los sistemas de producción más completa y adaptable a diferentes condiciones, por integrar todos los procesos como variables.

5.1.4 Modelo matemático

El modelado matemático es una técnica que se utiliza para describir y representar sistemas o procesos del mundo real mediante el uso de ecuaciones matemáticas y simulaciones computarizadas. Consiste en identificar las variables importantes del sistema, establecer

ISBN: 978-987-82912-7-7

relaciones entre ellas y utilizarlas para crear un modelo matemático que pueda predecir el comportamiento del sistema en diferentes condiciones.

El modelado matemático se utiliza en una amplia variedad de campos, como la física, la química, la biología, la ingeniería, la economía y muchas otras disciplinas. Es una herramienta poderosa para la comprensión y la predicción de fenómenos complejos y para la toma de decisiones informadas.

Existen diferentes enfoques para el modelado matemático, que pueden incluir la creación de modelos analíticos o numéricos, el uso de simulaciones computarizadas y la validación empírica de los modelos (Venkatasubramanian, 2017).

5.2 UTILIDAD DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Los modelos matemáticos pueden ser utilizados para resolver una amplia variedad de situaciones, desde problemas simples hasta problemas complejos. Algunas situaciones que pueden ser resueltas mediante el uso de modelos matemáticos incluyen:

Predicción del comportamiento de sistemas físicos y biológicos: por ejemplo, el movimiento de los planetas en el sistema solar, la propagación de epidemias en una población, el flujo de fluidos en tuberías, entre otros.

Optimización de procesos y sistemas: los modelos matemáticos pueden ser utilizados para optimizar procesos y sistemas, como la producción de bienes y servicios, la gestión de recursos naturales, la planificación de rutas de transporte y logística, entre otros.

Toma de decisiones financieras: los modelos matemáticos pueden ser utilizados en finanzas para predecir el comportamiento de los mercados, evaluar riesgos y oportunidades de inversión, y optimizar carteras de inversión.

Diseño de productos y procesos: los modelos matemáticos pueden ser utilizados para diseñar y optimizar productos y procesos en una variedad de industrias, como la automotriz, la aeroespacial, la electrónica, entre otras.

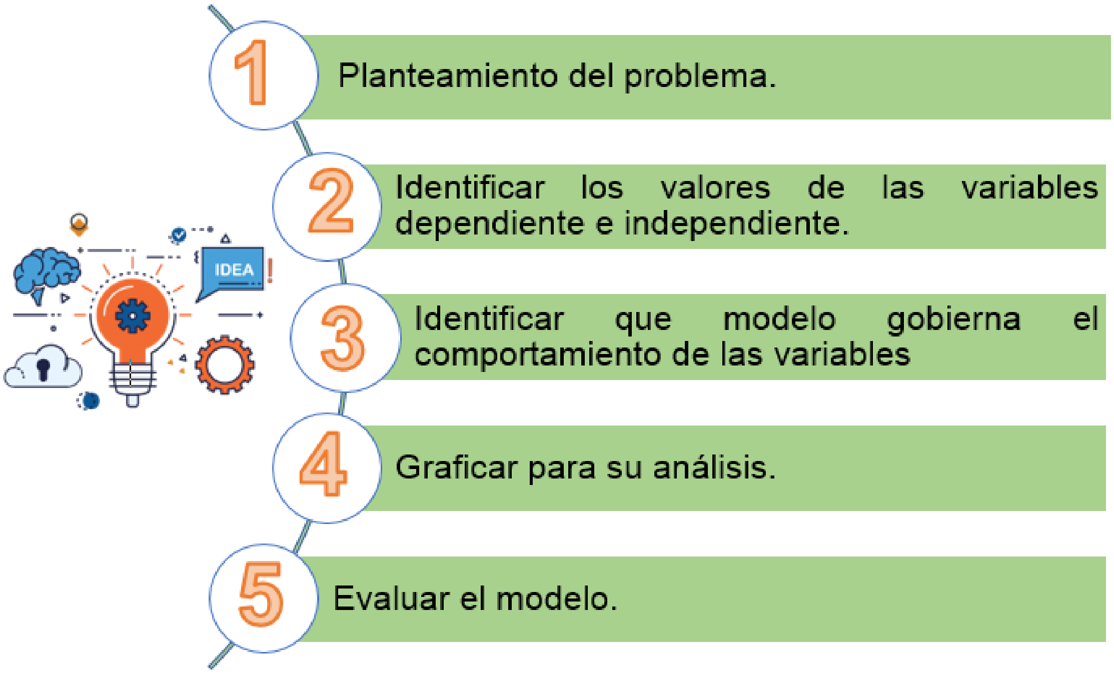
Investigación científica y tecnológica: los modelos matemáticos son herramientas esenciales en la investigación científica y tecnológica, como en la simulación de reacciones químicas, el diseño de nuevos materiales, la evaluación del impacto ambiental, entre otros (Hall, 2019).

5.3 METODOLOGÍA MODELADO MATEMÁTICO CON FUNCIONES

En la gráfica 63, se muestra, la metodología para la solución de problemas mediante el modelado matemático con funciones, parte del problema para definir las variables que

ISBN: 978-987-82912-7-7

intervienen en el proceso del fenómeno que ese está analizando, posterior a ello se define que modelo rige a dicho fenómeno, para luego de haber planteado una ecuación matemática que cumpla los requerimientos del problema este se ejecute y grafique para su análisis, es indispensable validar el modelo para saber cuan eficiente es para la solución del problema.



Gráfica 63. Metodología modelado matemático

Este es un proceso dinámico, en el que se puede mejorar continuamente, al repetir estos pasos.

ISBN: 978-987-82912-7-7

CAPÍTULO 6:

6 MODELADO CON FUNCIONES REALES ELEMENTALES EN AGRICULTURA

El modelado con funciones reales elementales en agricultura implica el uso de ecuaciones matemáticas que describen la relación entre las variables agronómicas, como el crecimiento de los cultivos, la producción y el rendimiento. Las funciones elementales más comúnmente utilizadas en el modelado agronómico incluyen funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Un ejemplo es la utilización de funciones polinómicas para modelar la relación entre el tiempo y la altura de una planta, o la producción de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante aplicado. Las funciones exponenciales se utilizan comúnmente para modelar la tasa de crecimiento de los cultivos, mientras que las funciones logarítmicas pueden utilizarse para modelar la relación entre la luz solar y la fotosíntesis en las plantas se puede predecir el crecimiento y el rendimiento de los cultivos en diferentes condiciones ambientales y de manejo. Todo esto ayuda a optimizar la producción agrícola y mejorar la eficiencia en la gestión de recursos como el agua y los nutrientes (Al-Jamal, 2013).

En la actualidad los sistemas de producción agrícola requieren ser organizados y productivos, esto se logra gracias a un mayor conocimiento en el área de la agricultura, esto propicia la especialización dentro de la agronomía para la implementación de innovaciones técnicas, así como los aspectos sociales, culturales, climáticos, o las propiedades físicas, químicas y biológicas del suelo para evitar pérdidas en campo.

El uso de los diferentes tipos de modelos dentro de la agricultura representa una herramienta para la planificación e investigación, ya se adicionan a los procesos que se mencionaron el párrafo anterior también otros como el efecto de políticas agrícolas, racionalidad de los productores, características del mercado y aspectos ambientales. Y desde el enfoque de los agroecosistemas estos modelos se han usado para simular la sustentabilidad, bajo una visión holística y sistémica.

6.1 IMPORTANCIA DEL USO DE MODELOS EN LA AGRICULTURA

El desarrollo de modelos en procesos agrícolas y ambientales se han implementado en las últimas décadas ya que el modelado y simulación de modelos responde a la solución de

ISBN: 978-987-82912-7-7

problemas grandes o complejos evitando costes innecesarios sin la necesidad de experimentar en dichos sistemas. Es por esto por lo que en la investigación y planificación agrícola el desarrollo de modelos para simular diferentes procesos relacionados con su eficiencia se ha convertido en una práctica común que se basa con información científica disponible para pronosticar resultados en situaciones y condiciones específicas; con el planteamiento de nuevas hipótesis, orientadas hacia el manejo hacia los puntos más críticos.

Además a través de modelaje matemático se puede transferir conocimientos generados sobre diversas prácticas agrícolas en regiones o ambientes diferentes a través de la simulación, también es útil a la hora de modificar sistemas de numerosos componentes relacionados, es necesario indicar que antes de ser implementados a la practicas se los debe evaluar mediante la simulación, ya que se debe evitar el riesgo en procesos con objetivos críticos, como seguridad agroalimentaria, manejo y conservación de recursos naturales, rentabilidad de los sistemas y otros.

Desde hace más de 50 años se ha modelado en agricultura para evaluar procesos individuales, como evapotranspiración, propiedades hidráulicas del suelo, crecimiento de las plantas o cultivos y el contenido de nutrientes del suelo, para evaluar sistemas de pastoreo, movilización de nutrientes en sistemas de cultivo, erosión (Williams, 1984) y productividad del suelo (G. Hernández, 1996), crecimiento de cultivos anuales (Holmann, 1997), producción de cultivos, contaminación de agua (Arumí, 2006), ciclos de nutrientes y la dinámica de la materia orgánica en suelos (Bowen, 2001).

Y en los años finales del siglo pasado aparecen modelos con enfoque de agroecosistemas que integran los componentes del sistema de manera multi o interdisciplinaria, para evaluar impacto de la política agrícola sobre la degradación del suelo, impacto ambiental y rentabilidad económica de sistemas agrícolas alternativos, impacto de la economía y política regional sobre la agricultura, efecto de políticas de manejo sobre emisiones de minerales en agricultura y la evaluación de pesticidas y fertilizantes sobre el suelo y el clima (Belcher, 2004).

6.2 MODELOS AGRÍCOLAS

Desde hace mucho tiempo se realiza el desarrollo de modelos para la representación de sistemas de cultivos para representar y evaluar diferentes procesos y bajo diferentes

ISBN: 978-987-82912-7-7

enfoques y disciplinas. A continuación, se presenta algunos modelos en el ámbito de la agricultura.

Se emplearon técnicas de simulación para examinar diferentes escenarios que buscan optimizar el uso del agua en el riego de diversos cultivos. Como parte de este proceso, se crearon tres submodelos: el primero se enfocó en identificar las necesidades hídricas de los cultivos, el segundo se encargó de establecer un plan de riego que tuviera en cuenta las necesidades de los cultivos, la evapotranspiración y la precipitación real, y el tercero se utilizó para estimar el rendimiento de los cultivos tomando en cuenta diversos límites de evapotranspiración. Como resultado de estos análisis, se obtuvo un plan de gestión de riego para 16 cultivos distintos a nivel regional (Ortega, 1999).

Mediante la integración de modelos de simulación y un sistema de información geográfica, se llevó a cabo una simulación del riego en diversas áreas y se logró obtener información detallada acerca del comportamiento del agua. Con base en estos resultados, se generaron mapas que incluyeron información relativa a los recursos hídricos, energéticos y operativos, lo que permitió planificar la reestructuración de los sistemas de riego y drenaje empleados en la producción de arroz en Cuba. Gracias a esta iniciativa, se pudo diseñar un conjunto de terrazas específicamente diseñadas para el cultivo de arroz (Rodríguez, 2000).

En su estudio de Gutiérrez, 2002), Gutiérrez utilizó modelos de simulación para generar distintos escenarios relacionados con los niveles de agua de los acuíferos del valle de Querétaro, México, en el periodo de 1995 a 2010. Para ello, se tomaron en cuenta tres niveles de consumo de agua por parte de diferentes sectores, incluyendo el uso público urbano, agrícola e industrial. Los resultados indicaron que el nivel actual de consumo de agua podría llevar a la desaparición del patrón de cultivos existente. Por esta razón, se propusieron una serie de medidas contempladas en uno de los escenarios analizados, con el fin de revertir esta situación. En conjunto, estos hallazgos demuestran la utilidad de los modelos de simulación como herramientas de apoyo a la toma de decisiones en cuestiones relacionadas con el uso de recursos naturales a nivel regional.

Los modelos de simulación también han sido empleados en la selección de material genético. En el estudio de Preciado, (2002), se desarrolló un modelo que permitió asistir en la selección de materiales de maíz de ciclo precoz adaptados a ambientes de secano

ISBN: 978-987-82912-7-7

con temporal. Para ello, se simularon el crecimiento de las plantas y su desarrollo fisiológico a través del efecto de los factores climáticos. Por otro lado, Singels, (1991)utilizaron modelos de simulación para determinar las características óptimas de un genotipo de trigo en diferentes tipos de climas y suelos. Estos ejemplos ilustran cómo los modelos de simulación pueden ser útiles en el proceso de selección de material genético para la agricultura.

El paquete llamado DSSAT es una herramienta integradora que combina modelos de simulación de clima, suelo, agua y nutrientes para simular el desarrollo de 16 cultivos en cualquier región, así como el efecto de su rotación a largo plazo y diferentes sistemas de manejo de los cultivos. Ofrece cuatro niveles de simulación que consideran las limitantes del desarrollo del cultivo, como la disponibilidad de radiación, temperatura, agua, nutrientes, nitrógeno y fósforo. Además, el DSSAT incluye una herramienta de procesamiento de datos climáticos y modelos específicos para cada tipo de cultivo, lo que facilita su adquisición e interpretación. Aunque requiere grandes cantidades de información de suelos, el DSSAT cuenta con una base de datos para estimar los datos faltantes. Según L. Giraldo, (2007), el DSSAT es capaz de organizar y archivar bases de datos sobre clima, suelos, cultivos, experimentos y precios, simular producciones de cultivos en una o varias épocas en secuencia, y evaluar diferentes prácticas de manejo específicas a una explotación o parte de ella. También permite analizar los resultados y representar simulaciones de manera gráfica.

No obstante, para comprender mejor los procesos del suelo agrícola, los modelos de simulación deben tener una amplia escala temporal y espacial. A nivel regional, se deben considerar los diferentes usos agrícolas del suelo, ya que los procesos en un cultivo pueden afectar a los cultivos cercanos, y es útil representar el relieve tridimensional del suelo de la región. Además, temporalmente, los modelos deben cubrir varios años para proporcionar datos históricos sobre la gestión del suelo (Walter, 2003). En un enfoque más reciente relacionado con el cambio climático, Streck, (2006) utilizó modelos de simulación para crear escenarios sobre el impacto del cambio climático en la fracción de agua aprovechable del suelo en cultivos de trigo (*Triticum aestivum*), soja (*Glycine max*) y maíz (*Zea mays*). Descubrieron que el aumento de la temperatura del aire reduce la fracción de agua aprovechable, y que este efecto es más pronunciado en los cultivos de soja y maíz que en los cultivos de trigo.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Cory, (2002), utilizó tanto la experimentación en campo como los modelos de simulación para analizar el impacto del tipo de labranza - convencional y de conservación - en la erosión hídrica del suelo en tierras de ladera con cultivos de trigo en invierno. A partir de la información obtenida en el campo y los datos del modelo, se encontró que los sistemas de labranza de conservación mostraron una menor erosión. Sin embargo, señala que el modelo no logró representar todos los procesos complejos observados en el campo, como la combinación de precipitación, congelación y descongelación intermitente del suelo, las pendientes pronunciadas y las prácticas inadecuadas de manejo.

Pérez, (2006), propone un modelo de simulación complejo y dinámico para la evaluación de los servicios ambientales hidrológicos a nivel de cuenca. El modelo es capaz de hacer proyecciones en sistemas donde no hay una monitorización de datos continua. Además, el modelo puede utilizarse para desarrollar políticas de gestión del agua a nivel de cuenca, considerando los diferentes usos del recurso, con especial atención en la agricultura debido a su importancia socioeconómica.

Castellazzi, (2008), propone un modelo matemático que simula la rotación de cultivos de manera estocástica en periodos específicos de un año y considerando el cultivo del año anterior. Este modelo puede pronosticar los efectos de la rotación de cultivos en el cambio climático y la economía, y tiene la capacidad de considerar otras variables externas. A diferencia de modelos anteriores, que usan técnicas de optimización matemática de programación lineal para planificar la producción agrícola, este modelo utiliza la dinámica de sistemas para representar procesos complejos con múltiples variables interactuando entre sí, lo que lo hace más adecuado para simular la realidad, en la que hay interacción de diferentes condicionantes y restricciones biológicas, económicas y otras. Anteriormente, otros autores también utilizaron la modelación en el desarrollo de rotaciones de cultivos, pero sus modelos asumieron que la única limitante era la restricción establecida, lo cual no es realista en la práctica.

Los modelos de simulación han sido exitosamente aplicados en diversos sistemas de cultivo con distintos grados de tecnificación, tales como maíz, soya, arroz, frijol, praderas, entre otros. Además, se han mostrado útiles para evaluar la sostenibilidad en sistemas de subsistencia que se encuentran en zonas frágiles, como las laderas, donde pueden ocurrir procesos de degradación ambiental. Sin embargo, debido a las particularidades de estos sistemas, tales como la diversificación de cultivos en tiempo y espacio, la itinerancia y el

ISBN: 978-987-82912-7-7

uso de herramientas manuales, los modelos convencionales de predicción de cultivos no pueden representar adecuadamente su complejidad. Por lo tanto, se deben diseñar modelos capaces de evaluar estos sistemas, siendo sencillos y basados en información fácilmente accesible (Silva, 2001).

Los sistemas agrícolas se pueden representar y explicar a través del uso de modelos de simulación, estos pueden ser muy eficientes de acuerdo capacidades y conocimientos del modelador. Para implementar un buen modelo en ocasiones es preciso el trabajo de equipos multidisciplinares para que aporten en base a experiencia y habilidades a generar el modelo del fenómeno en estudio.

6.3 ANÁLISIS GRAFICO DE MODELOS AGRONÓMICOS CON FUNCIONES

A continuación, se presentan el análisis grafio de algunos modelos con funciones reales que son el resultado obtenido a través del modelamiento del contexto tratado bajo los parámetros específicos que lo describen, además también se presenta su interpretación.

6.3.1 Curva de absorción de nutrientes.

Según Sancho, (2020), una curva de absorción es la representación gráfica de la extracción de un nutriente y representa la cantidad de este elemento extraído por la planta durante su ciclo de vida. La extracción de nutrientes depende de diferentes factores tanto internos como externos, (Marassi, 2020), agrega que esos datos nos sirven para predecir y planificar la cantidad de fertilizantes a usar durante el ciclo del cultivo y su época de aplicación.

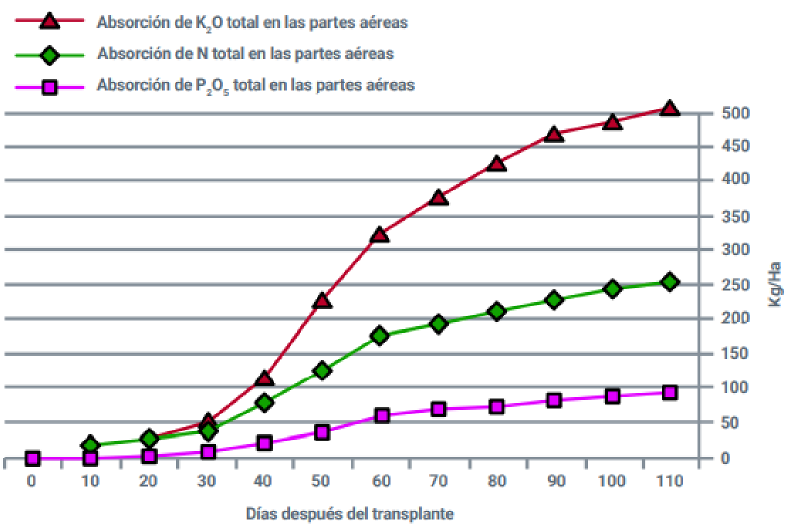


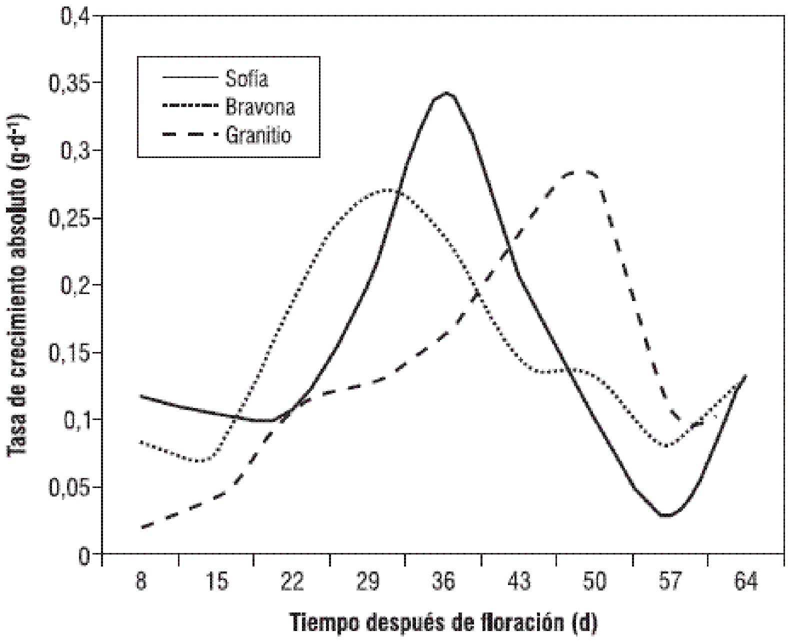
Figura 64. Curvas de absorción de N, P, K del cultivo de Tomate
Fuente: (NETAFIN, 2021)

ISBN: 978-987-82912-7-7

En el gráfico 64, se puede observar cómo se incrementa la tasa de absorción de los nutrientes en las partes aéreas en función del crecimiento de la planta y el tiempo que toma cada etapa del ciclo fenológico del cultivo, así podemos determinar etapas críticas y cantidades totales de fertilizantes para definir épocas y dosis de fertilización (SQM, 2021).

6.3.2 Tasa de crecimiento

La tasa de crecimiento se mide relacionando la cantidad de crecimiento alcanzado en un periodo definido, las unidades métricas que se usan van en función del tipo de cultivo o la parte aprovechable del mismo y están a discreción del investigador, se puede medir altura de la planta, masa foliar, peso y crecimiento de frutos, todo en relación con un periodo (Casierra, 2007).



Gráfica 65. Tasa de crecimiento de frutos de tres variedades de Tomate de mesa

Fuente: (Casierra, 2007)

En el gráfico 65, se observa en el eje vertical la tasa de crecimiento absoluto expresada en gramos por día, y en el eje horizontal los días después de la floración, el fruto se ha formado en todas las variedades a los 8 días y de ahí su crecimiento ha variado, estos datos nos sirven para determinar el tiempo que le toma a cada variedad alcanzar su máximo crecimiento, información que sirve para seleccionar la variedad que mejor se ajuste a las necesidades del mercado local o nacional y también para determinar momentos críticos para programar los riegos y fertilizaciones.

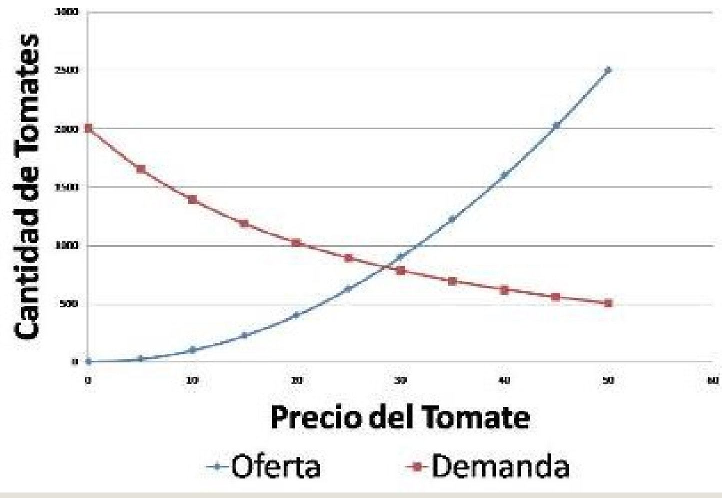
ISBN: 978-987-82912-7-7

6.3.3 Curvas de oferta y demanda

Para F. Hernández, (2022), la economía define que el precio de un producto es aquel donde vendedores y compradores están dispuestos a cambiar un bien o servicio por dinero, en consecuencia, ocurre una venta o una compra dependiendo del cristal con que se mire.

Los efectos dentro de la actividad agrícola dependen de los cultivos, estos casi siempre van de la mano de la oferta de productos, si están alineados con la demanda no debería haber fluctuación importante de precios, pero si no están correlacionados con la demanda se producen importantes fluctuaciones de precios.

Estos datos se pueden analizar de manera histórica, aunque cada ciclo es diferente en muchos casos se puede ver un movimiento constante tanto de oferta como demanda, analizar esta información nos puede servir como productores para planificar nuestra fecha de siembra para que la cosecha coincida, de ser posible, con el nivel de oferta más bajo y demanda más alta para poder obtener réditos económicos más altos (F. Hernández, 2022).

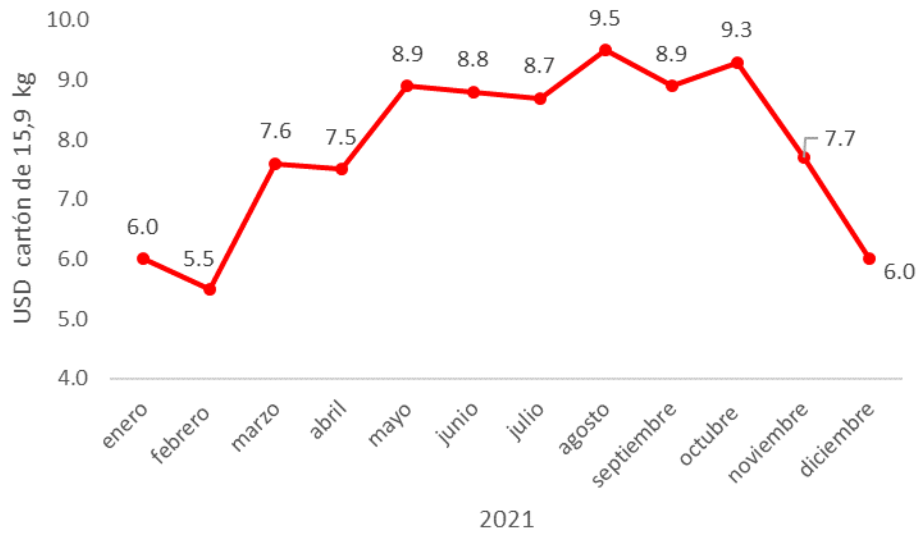


Gráfica 66. Curva Hipotética de oferta y demanda del cultivo de tomate

Fuente: (F. Hernández, 2022)

En la gráfica 66, se observa como a medida que el precio sube la oferta aumenta, y la demanda baja, esto provoca un cambio en la tendencia que hace que los precios fluctúen, así al final tenemos siempre una gráfica de picos.

ISBN: 978-987-82912-7-7



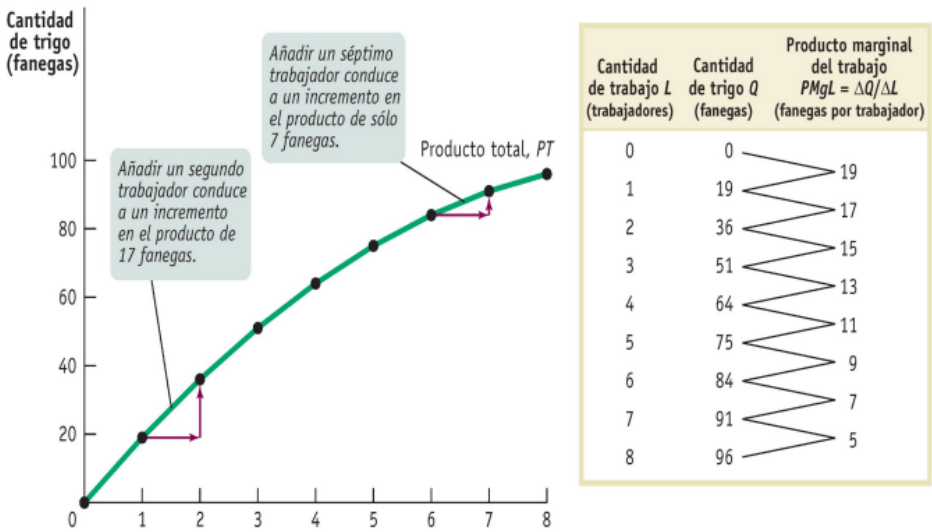
Gráfica 67. Precios de cultivo de tomate de mesa en Ecuador primer semestre 2021

Fuente: (MAG, 2021)

La curva de precios del cultivo de tomate riñón bajo invernadero de la Grafica 67, indica la fluctuación de los precios durante el año, obteniendo el precio más bajo de 5.5 USD por caja de tomate de 15.9 kg en febrero y el mayor precio en agosto con 9.5 (MAG, 2021).

6.3.4 Función de producción

Arzadun, (2020), describe que una función de producción es la relación entre la cantidad de factores productivos y la cantidad producida por una empresa agrícola, un factor productivo fijo no puede variar, un factor productivo variable puede variar en la granja.



Gráfica 68. Función de producción y curva de producto total de granja de trigo

Fuente: (Arzadun, 2020)

ISBN: 978-987-82912-7-7

En la gráfica 68, se observa la curva de producto total muestra cómo la cantidad cosechada depende del número de trabajadores, al aumentar de uno a dos trabajadores se produce un incremento de 17 fanegas cosechadas, si aumentamos el número de trabajadores de 6 a 7 el incremento es de 7 fanegas (Arzadun, 2020).

6.3.5 Curva de coste total

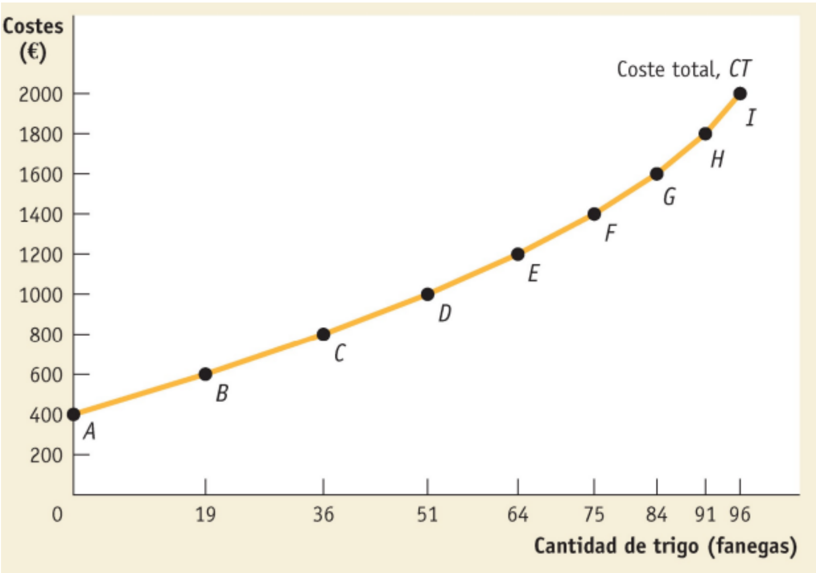
Arzadun, (2020) señala que un coste fijo es aquel que no depende de la cantidad de output producido. Es el coste del factor productivo fijo.

Un coste variable es aquel que depende de la cantidad de output producido. Es el coste del input variable.

El coste total de producir una cantidad dada de output es la suma del coste fijo y del coste variable de producir esa cantidad de producto.

$$CT = CF + CV$$

La curva de coste total tiene pendiente cada vez mayor a medida que se produce más output debido a los rendimientos decrecientes.



Gráfica 69. Curva del coste total de la granja de trigo

Fuente: (Arzadun, 2020)

En el gráfico 69, observa como a medida que aumentan los rendimientos también aumentan los costes de producción, estos datos nos sirven para definir los precios de venta y márgenes de ganancia, puesto que implica llevar el control de todos los aspectos referentes a la producción desde el valor del terreno, los equipos, insumos, trabajadores y su tiempo.

ISBN: 978-987-82912-7-7

6.3.6 Campana de Gauss y factores limitantes

La campana mencionada muestra la manera en que se distribuye la probabilidad de una variable continua, generando una función matemática en la cual existen dos magnitudes, una dependiente de la otra, que llevan por nombre (Dominio y Codominio) (UDEC, 2020).

Su fórmula es:

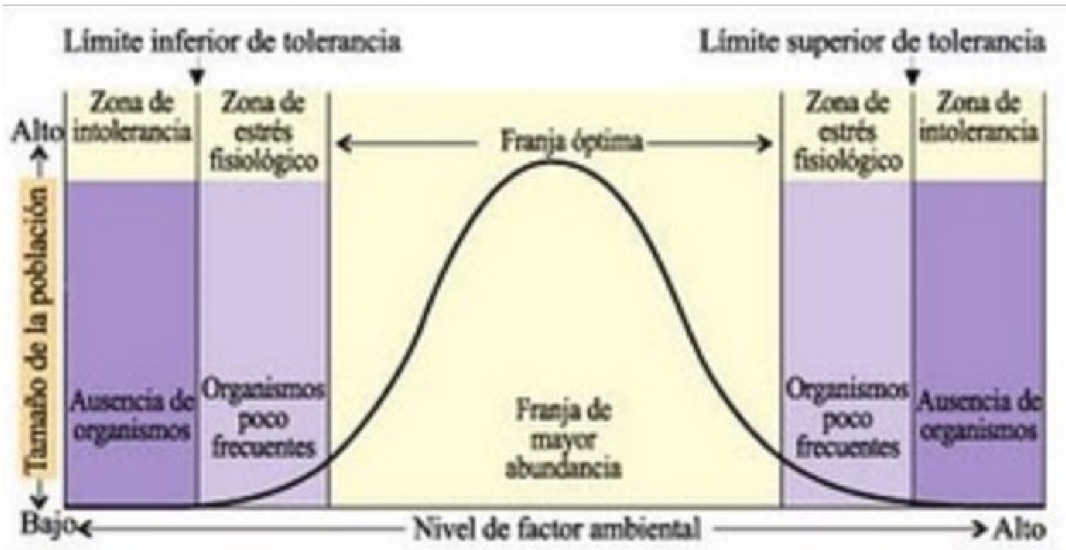
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)x\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)2}$$

Donde:

μ= Media.
σ= Desviación típica.
Con esta ecuación se obtiene el gráfico por lo que es importante para esta función considerar lo siguiente:

- La función considera la media y la desviación estándar.
- Es simétrica.
- Tiene una asíntota horizontal.
- El área entre la función y el eje horizontal es igual a 1, es decir que toda el área bajo la curva representa el 100%.

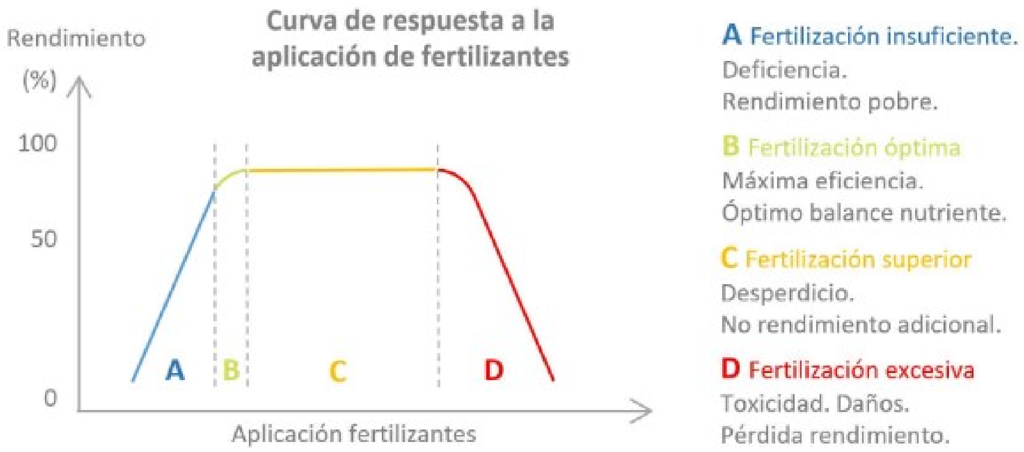
Con esta función se pueden graficar los factores que limiten o estimulen el crecimiento de un organismo o una población. Más cerca del pico del gráfico se encuentran los valores óptimos que permiten el crecimiento y cuando estos se alejan a la izquierda o derecha significa que nos acercamos a los puntos limitantes (Gráfico 70).



Gráfica 70. Factores limitantes
Fuente: (UDEC, 2020)

ISBN: 978-987-82912-7-7

Esta función sirve para graficar y comprender el desarrollo de una población, en el eje vertical se ubica el crecimiento del organismo o la población y en el eje horizontal el factor determinante, así podemos definir las zonas de crecimiento 0 y ausencia de población o zonas de intolerancia, zonas con poco crecimiento o poca poblaciones mínimas o zonas de estrés fisiológico, y entre estas estará la Franja óptima, donde un organismo alcanza su mayor crecimiento o el máximo número de individuos de una población (UDEC, 2020).



Gráfica 71. Curva de respuesta a la aplicación de fertilizantes
Fuente: (UDEC, 2020)

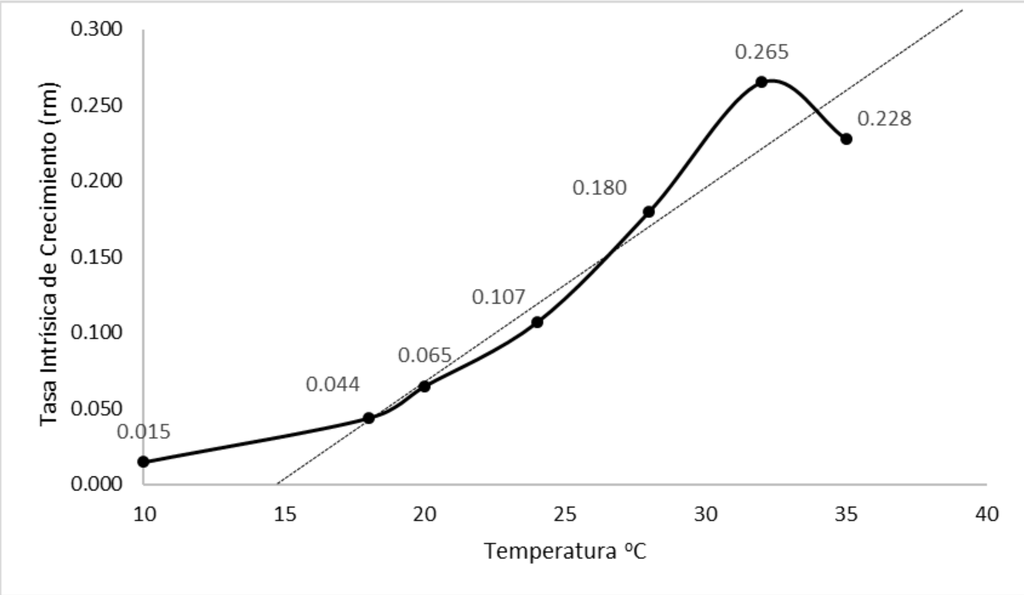
En la Gráfico 71, se puede ver el área de la curva (B) en donde se obtiene la máxima eficiencia del fertilizante, ver las zonas de fertilización de un cultivo, donde se diferencian las zonas en insuficiente, Óptima, Superior y excesiva.

6.3.7 Crecimiento Poblacional de Plagas

La aparición de plagas depende básicamente de tres factores, la presencia de un hospedero, factores abióticos y una población inicial, dando por sentado la presencia de un hospedero y de una población inicial el aumento de esta dependerá de los factores abióticos, principalmente temperatura y humedad (Jiménez, 2009).

En la Gráfico 72, se puede apreciar que *Rhyzopertha dominica* F. alcanza su máximo potencial de multiplicación a temperaturas comprendidas entre 30 °C y 35 °C, pudiendo llegar a tener hasta siete generaciones anuales alimentándose de granos de trigo. El potencial de multiplicación desciende progresivamente entre 30 °C y 20 °C debido tanto al aumento del tiempo de desarrollo de inmaduros como al descenso de fecundidad diaria en las hembras. Temperaturas inferiores a 20 °C resultan muy desfavorables para el desarrollo de este insecto (Faroni, 1992).

ISBN: 978-987-82912-7-7

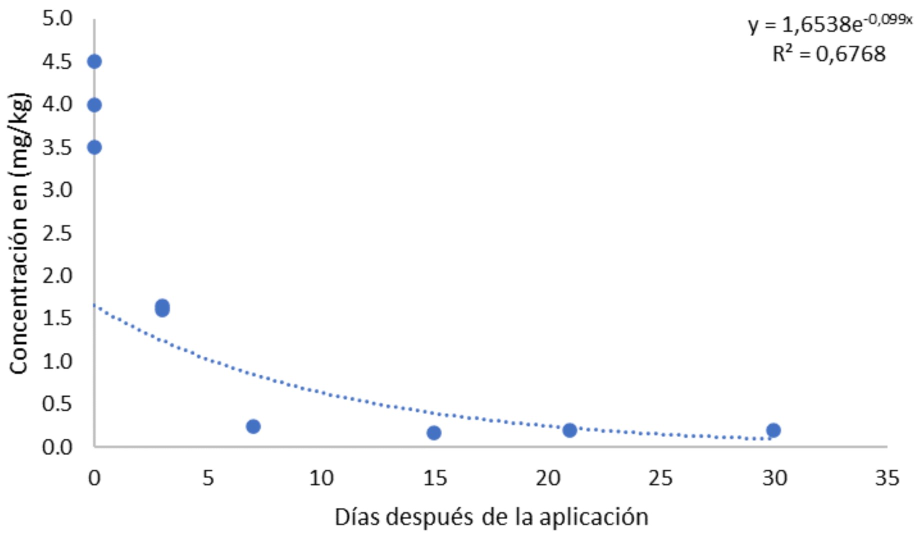


Gráfica 72. Curva de crecimiento de *Rhyzopertha dominica*

Fuente: (Faroni, 1992)

6.3.8 Curva de degradación de pesticidas

Navarro, (2010)**,** señalan que para obtener cultivos de calidad, inocuos y aptos para el consumo humano es necesario realizar un correcto manejo de plagas y enfermedades, lo que incluye la aplicación de un programa de manejo integrado donde se limite el uso de sustancias químicas toxicas, por eso es necesario saber la tasa de degradación de cada producto usado en el control, para saber cuándo es el límite permitido para su uso, con el objetivo de que el producto final llegue al consumidor sin trazas de pesticidas.



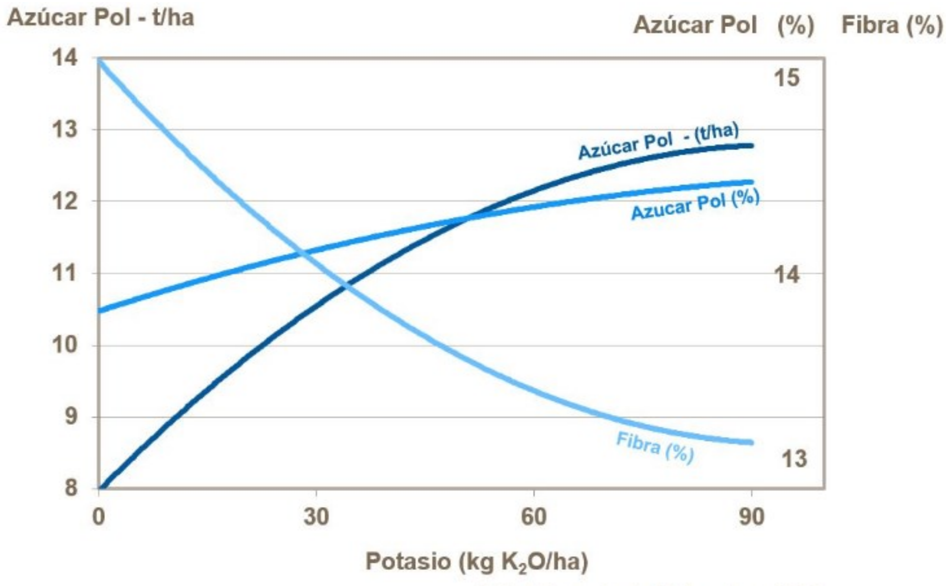
Gráfica 73. Degradación de clorpirifos en uva Cabernet Sauvignon (2014)

Fuente: (Navarro, 2010)

ISBN: 978-987-82912-7-7

En la Gráfico 73, se observa una relación inversa, es decir que a medida que los días aumenta después de la aplicación se degrada la molécula de Clorpirifos en el cultivo de la vid, esto nos indica que esta molecula demora 30 días en degradarse por lo que el límite de este producto se debe aplicar 30 dìas antes de la cosecha para que el cultivo llegue sin trazas del plaguicida al consumidor final.

6.3.9 Relación calidad de frutos con fertilización, caso grados Brix y Pol



Gráfica 74. Relación potasio grados pol, brix y porcentaje de fibra en caña de azúcar
Fuente: (YARA, 2022)

YARA, (2022), indica que se miden dos cualidades de la caña de azúcar para determinar su calidad, son los grados Brix y Pol en caña de azúcar.

Grados Brix es el contenido de sólidos solubles de la primera fase de procesamiento del jugo en el ingenio, acertado con un refractómetro. Pol (medición de la polarización) es el contenido de sacarosa en el jugo.

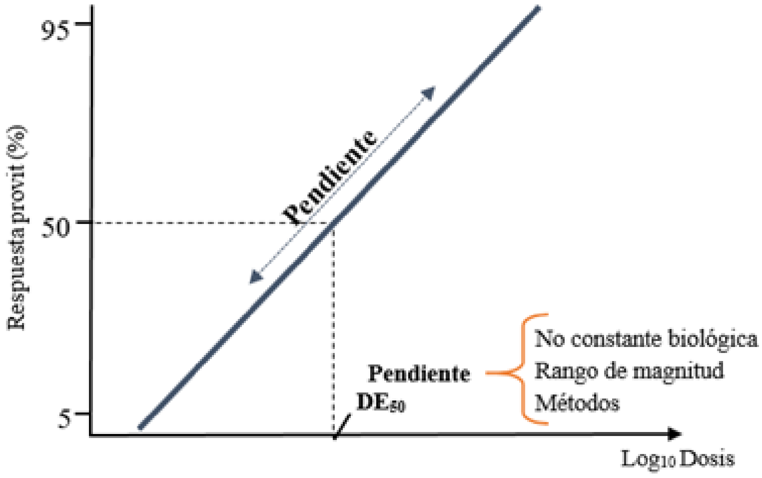
En la Gráfica 74, se observa que a medida que se aumenta la fertilización con potasio se produce un incremento en los grados brix y pol y se reduce el porcentaje de fibra cuando las aplicaciones de potasio van en aumento.

6.3.10 Cálculo de dosis letal 50 (DL_{50})

La determinación de la DL_{50} suele ser el primer análisis realizado en un plaguicida nuevo. La DL_{50} se obtiene trazando una línea horizontal desde el 50% de mortalidad (en el eje de ordenadas) hasta la línea dosis-efecto. En la Gráfica 75, se observa en el punto de intersección se traza una línea vertical que corta al eje de abscisas en un punto que corresponde a la DL_{50}. De forma similar se podrían calcular las dosis letales para el 90%

ISBN: 978-987-82912-7-7

y 10% de la población (DL_{90} y DL_{10}), pero en estos extremos de la curva el rango de valores determinados por los límites de confianza es mayor, aumentando la incertidumbre (inexactitud) del valor (Granada, 2010).



Gráfica 75. Dosis Letal 50 (DL_{50})
Fuente: (Granada, 2010)

6.4 POSIBLES SOLUCIONES A PROBLEMAS AGRÍCOLAS CON MODELADO MATEMATICO

El modelado con funciones elementales puede ser una herramienta valiosa para abordar una amplia variedad de problemas agrícolas, desde la optimización del uso de recursos hasta la predicción de plagas y enfermedades. Algunos ejemplos de problemas agrícolas que pueden resolverse utilizando modelado con funciones elementales se presentan a continuación:

Modelado del crecimiento de los cultivos: Las funciones elementales pueden ser utilizadas para modelar el crecimiento de los cultivos en función de diferentes variables, como la temperatura, la humedad, la cantidad de luz, la disponibilidad de nutrientes, agua entre otros. Estos modelos pueden ayudar a los agricultores a predecir el crecimiento de las plantas y ajustar las condiciones de cultivo para maximizar la producción. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por (Kang, 2018), donde se utilizó el modelado con funciones elementales para estimar el crecimiento del cultivo de soja. Otro ejemplo, el estudio publicado en la revista Plant Methods utilizó un modelo basado en funciones elementales para analizar el crecimiento de la remolacha azucarera y predecir su rendimiento bajo diferentes condiciones de cultivo.

Optimización del uso de recursos: Las funciones elementales pueden ser utilizadas para optimizar el uso de recursos en la agricultura, como el agua, los nutrientes y los pesticidas.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Un ejemplo de ello es el estudio realizado por (Padhi, 2019), donde se utilizó el modelado con funciones elementales para optimizar el uso del agua en el cultivo de arroz, al predecir la cantidad de agua que se necesita en diferentes etapas del cultivo se puede programar el riego de manera más eficiente. Otro ejemplo, un estudio publicado en la revista PLOS ONE utilizó un modelo basado en funciones elementales para optimizar el uso del agua en el cultivo de maíz en el Valle de San Joaquín, California.

Predicción de plagas y enfermedades: Las funciones elementales también pueden ser utilizadas para predecir la propagación de plagas y enfermedades en los cultivos. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por (Nderitu, 2020), donde se utilizó el modelado con funciones elementales para predecir la propagación del virus de la hoja rizada en el tomate, estos modelos pueden ayudar a los agricultores a anticipar y prevenir brotes de enfermedades, reduciendo así la necesidad de plaguicidas y otros productos químicos.

Modelado de sistemas de producción agrícola: Las funciones elementales pueden ser utilizadas para modelar sistemas completos de producción agrícola, desde la siembra hasta la cosecha y el procesamiento. Un ejemplo de ello es el estudio realizado por (Yu, 2021), donde se utilizó el modelado con funciones elementales para simular el impacto de diferentes prácticas de manejo del suelo en el rendimiento del cultivo de maíz, estos modelos pueden ayudar a los agricultores a optimizar sus prácticas y maximizar la eficiencia en todas las etapas del proceso.

6.5 MODELADO CON FUNCIONES ALGEBRAICAS

El modelado con funciones algebraicas es una técnica matemática que se utiliza en diferentes campos de la ciencia, incluyendo la agricultura, en esta se pueden modelar diferentes procesos, desde el crecimiento de los cultivos hasta la optimización de la producción. A continuación, se presentan algunos ejemplos de la aplicación de modelado con funciones algebraicas en la agricultura: (Yang, 2020), utilizó una función polinómica para modelar el crecimiento del cultivo de papa, (Ghasemi, 2016), utilizó una función logística para predecir el rendimiento del cultivo de trigo en función de la cantidad de nitrógeno aplicado, (Zaman, 2020) aplicó una función cuadrática para optimizar el uso del agua en el cultivo de trigo, (Cao, 2021) aplicó una función cuadrática para modelar la producción de biogás a partir de la cosecha de maíz, entre otros.

ISBN: 978-987-82912-7-7

6.5.1 Modelado con funciones polinómicas

Las funciones polinómicas son muy utilizadas en la agronomía para modelar relaciones entre variables, como la relación entre la cantidad de agua de riego y el crecimiento de las plantas. Algunos ejemplos de modelos que utilizan funciones polinómicas en la agronomía son:

Modelo de respuesta de la cosecha: Este modelo utiliza una función polinómica para predecir el rendimiento de una cosecha en función de la cantidad de fertilizante aplicado. Esta función se utiliza para optimizar la cantidad de fertilizante que se debe aplicar para obtener el mayor rendimiento posible (M. García, 2003).

Modelo de crecimiento de las plantas: Este modelo utiliza una función polinómica para predecir el crecimiento de las plantas en función del tiempo y de las condiciones ambientales, como la temperatura y la humedad. Este modelo ayuda a entender el crecimiento de las plantas para optimizar las condiciones de cultivo (Hunt, 2016).

Modelo de distribución de la humedad en el suelo: Este modelo aplica una función polinómica para predecir la distribución de la humedad en el suelo en función de la cantidad de agua de riego y de las características físicas. Este modelo se utiliza para optimizar la cantidad de agua de riego que se debe aplicar para mantener la humedad del suelo en niveles adecuados (Feddes, 1978).

6.5.1.1 Modelado con funciones lineales

La función lineal es comúnmente utilizada en la agricultura para modelar el crecimiento de las plantas y para predecir el rendimiento de los cultivos. Un ejemplo de ello es la relación entre la cantidad de agua aplicada a un cultivo y la cantidad de biomasa producida puede ser modelada por una función lineal (Sharma, 2018). Otro puede ser la modelación de la relación entre la densidad de plantas en un campo y el rendimiento del cultivo. También permite determinar la cantidad de fertilizante a aplicar a un cultivo y la producción de una cosecha, la relación entre el tiempo de exposición a un herbicida y su efecto en el control de malezas, entre otros (Gómez, 2008).

A continuación, se presentan algunos ejemplos de modelación con funciones lineales.

1. **En una florícola se requiere saber cuánto sería el ingreso bruto según el número de bonches de rosas que venderá, el precio unitario en temporada alta de cada bonche es de $ 4.**

ISBN: 978-987-82912-7-7

Datos:

Precio unitario de bonche \$ 4, constante de proporcionalidad

x, número de bonches, variable independiente

$i(x)$, ingreso bruto según el número de bonches vendidos, variable dependiente

Ya que el precio unitario de cada bonche es de \$ 4, es una función lineal de proporción directa, entonces la ecuación sería:

$$y = 4x$$

Tabla de valores

x	$i(x)$
0	0.0
1	4.0
2	8.0
3	12.0
4	16.0
5	20,0
6	24.0
7	28.0
8	32.0
9	36.0
10	40.0

Gráfica 76. Ingreso bruto

Para la construcción de la gráfica en Excel se elabora en primera instancia la tabla de valores, no sin antes analizar el dominio, se conoce que el dominio de una función lineal son los reales, pero en un contexto real no se puede asignar al número de bonches vendidos como negativos por lo que se considera como dominio $[0,\infty)$.

Interpretación de resultados mediante análisis visual.

Como se puede visualizar en la Gráfica 76, el resultado del modelo es una función lineal de crecimiento, cuando no se vende nada, es decir: $x = 0$, el ingreso bruto también es cero, y como la gráfica presenta las ventas de 0 hasta 10 bonches vendidos, se puede determinar en cualquier punto de este intervalo gráficamente el ingreso bruto. Por ejemplo, si se venden 6 bonches el ingreso es de 24 dólares.

2. **En los primeros 30 días después del trasplante una planta de girasol variedad Vincent Choice mide 34 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente**

ISBN: 978-987-82912-7-7

proporcional al tiempo, a los 60 días ha pasado a medir 91 cm. Establecer una función que dé la altura de la planta en relación con el tiempo.

Datos:

Altura inicial es de 34 cm, constante

Crecimiento mensual $\frac{91-34}{60} = 0.95$, constante de proporcionalidad

t, número de meses, variable independiente

$l(t)$, numero de meses, variable dependiente

La ecuación queda:

$$l(t) = 0.95t + 34$$

Se puede observar que es una función lineal, de lo cual se desprende que el dominio son los reales, de igual manera que en el anterior ejercicio, al analizar en el contexto real se determina que n se pueden colocar tiempos negativos. Como se desea determinar la altura en 90 días, entonces:

$$l(1) = 0.95(60) + 34$$

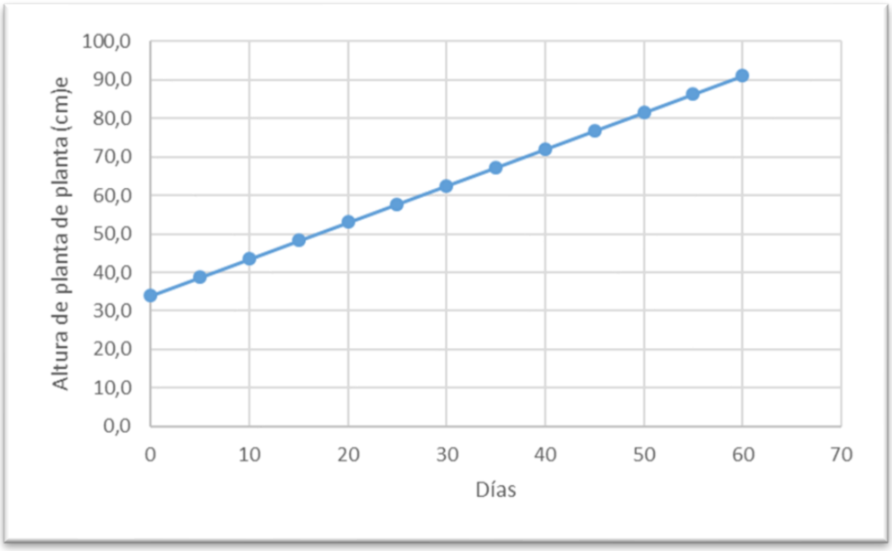
$$l(1) = 57 + 34$$

$$l(1) = 91$$

De igual manera que en el ejercicio anterior se construye la tabla de datos para graficar la función con las consideraciones indicadas.

Valores

t	*l(t)*
0	34,0
5	38,8
10	43,5
15	48,3
20	53,0
25	57,8
30	62,5
35	67,3
40	72,0
45	76,8
50	81,5
55	86,3
60	91,0



Gráfica 77. Altura de la planta de Girasol en función del tiempo

ISBN: 978-987-82912-7-7

Interpretación de resultados mediante análisis visual.

La gráfica 77, corresponde a un modelo de función lineal, donde 34 que es la intersección con el eje vertical corresponde al tamaño inicial de la planta, como el fenómeno crecimiento de una planta es creciente, entonces mientras transcurren los días también aumenta el tamaño, en este caso se pide encontrar el tamaño después de 30 días con los que al visualizar cuando 60, el valor de la longitud es 91 cm.

3. **Se requiere predecir la cantidad de trigo a cosechar por hectárea en función de la cantidad de agua que ha recibido el cultivo. Para ello, se tiene la recolección datos en campo durante varios años. Construir un modelo matemático que le permita estimar la producción de trigo en función de la cantidad de agua** (Guzmán, 2005)**.**

Los datos recolectados se muestran a continuación:

Tabla 7. Datos de produccion de trigo según cantidad de agua

Cantidad de agua [m^3/ha]	**Producción de trigo [ton/ha]**
100	2.5
150	3.0
200	3.5
250	4.0
300	4.5
350	5.0

Para modelar esta relación, se puede utilizar una función lineal de la forma:

$$Producción\ de\ trigo\ =\ m\ *\ Cantidad\ de\ agua\ +\ b$$

Donde:

m, pendiente de la recta, representa cuánto aumenta la producción de trigo por cada unidad adicional de agua recibida.

b, punto de intersección de la recta con el eje Y, representa la producción de trigo cuando la cantidad de agua es cero.

Ahora para simplificar la escritura se va a realizar el siguiente cambio:

y, producción de trigo en función de la cantidad de agua.

ISBN: 978-987-82912-7-7

x, cantidad de agua

Entonces:

$$y = m * x + b$$

Para encontrar los valores de m y b que mejor ajustan los datos.

Para hallar la pendiente se aplica:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Los valores de y_2, y_1 representan dos valores de la variable dependiente en este caso la producción de trigo y x_2, x_1 representan dos valores de la variable independiente en este caso la cantidad de agua.

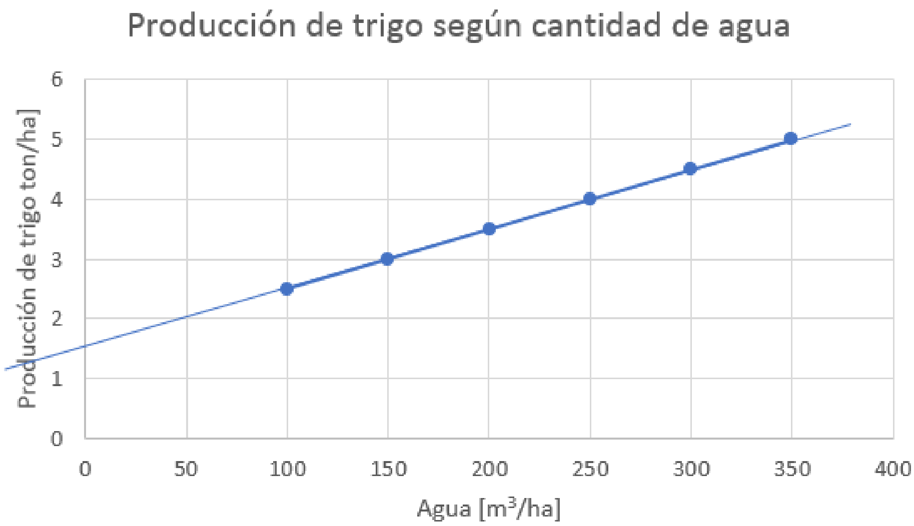
$y_2 = 2.5$, $y_1 = 3$ y $x_2 = 150$, $x_1 = 100$, que corresponden a los datos de los dos primeros años, entonces:

$$m = \frac{3 - 2.5}{150 - 100}$$

$$m = \frac{0.5}{50}$$

$$m = 0.01$$

Para el cálculo del valor de b, se realiza la gráfica y mediante observación se aproxima el valor de la intersección con el eje Y.



Gráfica 78. Producción de trigo

ISBN: 978-987-82912-7-7

Como se puede observar mediante un análisis en la gráfica 78, al extender la recta esta cruza al eje Y, en aproximadamente 1.6, por lo tanto, este valor corresponde a b.

Entonces el modelo de producción según la cantidad de agua es:

$$y = 0.01 * x + 1.6$$

Por lo tanto, según este modelo, si un agricultor desea producir 5 toneladas de trigo por hectárea, necesitaría aplicar 340 m^3 de agua por hectárea.

Esto sigue de la siguiente manera:

$$5 = 0.01 * x + 1.6$$

$$5 - 1.6 = 0.01 * x$$

$$x = \frac{3.4}{0.01}$$

$$x = 340$$

Este valor se corresponde a la cantidad de agua requerida para producir

$$5\ \frac{ton}{ha}$$

6.5.1.1.1 Regla de tres

La regla de tres nos ayuda a resolver problemas de proporcionalidad, por lo que es muy utilizada en los cálculos agronómicos, como por ejemplo si se tiene una referencia de un fertilizante por hectárea y se quiere aplicar a una área menor es posible saber cuánto se debe aplicar por medio de una regla de tres, de esta manera el agricultor puede ajustar la cantidad de fertilizantes y otros insumos agrícolas de manera precisa, también se puede saber cuántos litros de agua necesita para una aplicación menor a la establecida por hectárea, se puede saber cuánto cuesta un terreno conociendo el valor del metro cuadrado, o al conocer el número de semilla por hectárea trasladar la necesidad a una área más pequeña, o cuantas plantas se pueden sembrar en una área determinada conociendo cuantas se siembran por hectárea, así como estas aplicaciones se pueden mencionar muchas más.

Antes de empezar con problemas que se resuelven mediante la regla de tres simple es importante conocer algunos conceptos importantes para aplicar la proporcionalidad como son la razón y proporción.

ISBN: 978-987-82912-7-7

La razón

Es el cociente entre dos números o cantidades comparables entre sí**,** y se expresa como una fracción (Smartick, 2015).

Dados dos números a y b ∊ R, la razón (***r)*** entre ellos se representa mediante la fracción $\frac{a}{b}$

Un ejemplo: Hallar la razón entre 6 y 2.

$$r = \frac{6}{2}$$

$$r = 3$$

Entonces la razón entre 6 y 2 es 3

La proporción

Dados los números a, b, c y d ∊ R, estos forman una proporción si la razón entre a y b es la misma que entre c y d. Dicho de otra forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces a es a b, como c es a d.

En esta proporción, a y d, son los *extremos*, y b y c son los *medios*, en las proporciones se cumple que *el producto de los medios es igual que el producto de los extremos*. Es decir:

$$\boldsymbol{a * d = b * c}$$

Ejemplo: Dados las parejas de números: 5 y 2; 10 y 4; 100 y 40

Representamos las razones para contrastar si existe proporción.

1. $\frac{5}{2} = 2.5$
2. $\frac{10}{4} = 2.5$
3. $\frac{100}{40} = 2.5$

Como se puede observar si existe proporción ya que la razón en los tres casos es 2.5.

Proporcionalidad

Entonces dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida respectivamente por el mismo número. Y para aplicarla se deben cumplir las siguientes recomendaciones:

ISBN: 978-987-82912-7-7

- Si la relación entre las magnitudes es directa**,** es decir que cuando aumenta una magnitud también lo hace la otra, se debe aplicar la regla de tres simple directa.
- Por el contrario, si la relación entre las magnitudes es inversa, es decir cuando aumenta una magnitud disminuye la otra, se aplica la regla de tres simples inversas.
- **Regla de 3 simple**

Esta es una operación que nos ayuda a resolver rápidamente problemas de proporcionalidad**,** tanto directa como inversa. Para aplicar una regla de tres simple, es necesario conocer tres datos, de las cuales dos magnitudes deben ser proporcionales entre sí, utilizando estos se puede calcular el cuarto término de la proporcionalidad.

- **Regla de 3 simple directa**

Se aplica cuando existe proporcionalidad directa, es decir cuando aumenta una magnitud también aumenta la otra.

Los tres datos conocidos se representan con *a, b, c* y la incógnita con *x*, es decir, el dato que quiere encontrar.

$$a \rightarrow b$$

$$c \rightarrow x$$

Entonces, como *a* es a *b*, como *c* es a *x*, luego se aplica la regla de extremos y medios, entonces queda:

$$\boldsymbol{a * x = b * c}$$

Entonces el valor de x que es la incógnita se calcula así:

$$\boldsymbol{x = \frac{b * c}{a}}$$

A continuación, se presentan algunos ejemplos de regla de tres dentro el contexto de la agricultura:

1. Si 200 ml de fertilizantes se disuelven en 100 l de agua. ¿Qué cantidad de fertilizantes se necesita para 2 l de agua?

$$100\, l ----200\, ml$$

$$2\, l \quad ------\ x$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$2\,l * 200\,ml = x * 100\,l$$

$$x = \frac{400\,l * ml}{100\,l}$$

$$x = 4\,ml$$

Para 2 l de agua se debe agregar 4 ml de fertilizante para mantener las propiedades y efectividad de este.

2. Una máquina llena 42 galones de agua en 7 minutos. ¿Cuántos galones podrá llenar en 30 minutos?

$$7 \text{ min} - - - 42\ galones$$

$$30\ min - - - -\ x$$

$$7 * min * x = 42\ galones * 30 * min$$

$$x = \frac{42\ galones * 30\ min}{7\ min}$$

$$x = \frac{1260\ galones * min}{7\ min}$$

$$x = 180\ galones$$

En 30 minutos la maquina llenará 180 galones de agua.

3. Si en 10000 m^2con un marco de plantación de 5 metros entre hileras y 3 metros entre plantas se plantan 666 árboles de manzana cuantos entrarán en 1.5 hectáreas ¿Cuántos árboles se plantarán en 15000 m^2

$$466\ arboles\ - - - -10000\ m^2$$

$$x - - - -15000\ m^2$$

$$x *\ 10000\ m^2 = 666\ arboles * 15000\ m^2$$

$$x = \frac{666\ arboles * 15000\ m^2}{10000\ m^2}$$

$$x = \frac{9990000\ arboles * m^2}{10000\ m^2}$$

$$x = 999\ árboles$$

En 15000 m^2 se pueden plantar 999 árboles.

ISBN: 978-987-82912-7-7

4. Si 2 tractores tardan 10 días en arar un terreno. ¿Qué tiempo tardarán 5 tractores en hacer el mismo trabajo?

$$2\ tractores\ \ ----10\ dias$$

$$5\ tractores ----\ x$$

En este caso se tiene una proporcionalidad inversa por lo que se plantea de la siguiente manera:

$$2\ tractores * 10\ dias = 5\ tractores * x$$

$$x = \frac{2\ tractores * 10\ dias}{5\ tractores}$$

$$x = \frac{20\ tractores * dias}{5\ tractores}$$

$$x = 4\ dias$$

Entonces 5 tractores pueden arar el terreno en 4 días.

5. Cuatro agricultores han recolectado en 9 días 3240 kg de tomates. ¿Cuántos kg de tomates recolectarán 7 agricultores en 11 días?

$$4\ agricultores ----\ \ 9\ dias\ \ ----3240\ kg$$

$$7\ agricultores ----\ \ 11\ dias ----\ \ x$$

$$agricultores * 9\ dias * x = 7\ agricultores * 11\ dias * 3240\ kg$$

$$36 *\ \ x * agricultores *\ \ dias = 249480 * agricultores * dias * kg$$

$$x = \frac{249480 * agricultores * dias * kg}{36 * agricultores *\ \ dias} = 6930\ kg$$

$$x = 6930\ kg$$

Entonces, 7 agricultores cosecharon en 11 días, 6930 Kg de tomate.

6.5.1.1.2 La regla de 3 como función matemática

La regla de 3 es la función más utilizada de todos los tiempos, para hacer referencia a esto se va a trabajar con el siguiente ejemplo:

ISBN: 978-987-82912-7-7

Un agricultor vende una caja de duraznos en \$ 15. ¿Cuánto debe cobrar si vende 5 cajas?

$$1\ caja - - - - \$\ 15$$

$$5\ caja - - - - y$$

$$1\ caja * y = 5\ caja * \$\ 15$$

$$y = \frac{5\ caja * \$\ 15}{1\ caja}$$

Ahora antes de desarrollar la operación, se va a considerar el número de cajas como la variable independiente x, ya que depende de cuantas cajas el agricultor venda para saber cuánto debe cobrar y se conoce el valor unitario por caja, entonces, se puede escribir de la siguiente manera:

$$y = \frac{x\ caja * \$\ 15}{1\ caja}$$

Donde:

y, es el valor en dólares por cobrar por la venta de las cajas de durazno, y es la función porque depende de cuantas cajas se vendieron.

x, es el número unidades de cajas vendidas de durazno

15, es el valor contante en dólares que refiere al valor unitario de la caja de durazno

$$y = 15x$$

Como se propuso en el ejercicio x= 5.

$y = 5 * \ 15$

$$y = 75$$

Entonces el valor a cobrar es 75 dólares ya que las unidades de y eran dólares. Esta es una manera de responder a una pregunta genérica.

Ahora se debe representar gráficamente para su análisis.

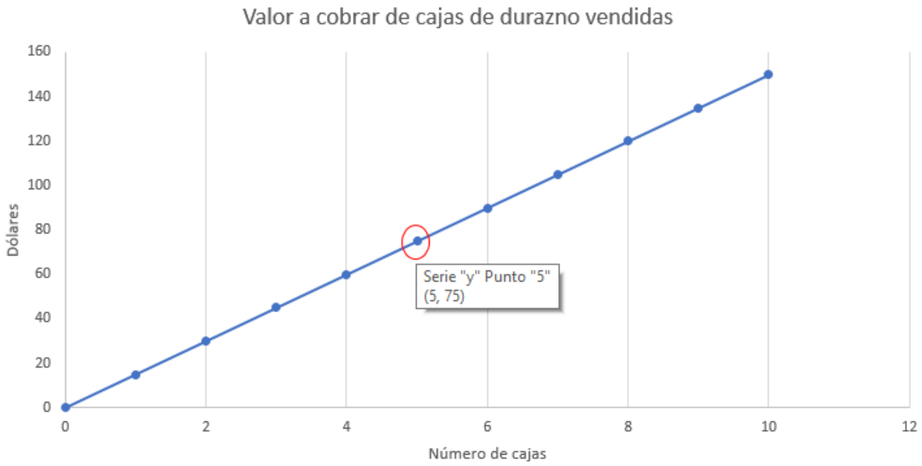
En primeria instancia para construir la tabla de valores que se va a representar en la gráfica, se define el dominio como solo los valores positivos, ya que no se puede vender un número negativo de cajas de durazno.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Los valores del obtenidos en la solución de la regla de tres se encuentran representados en la gráfica 79, como se puede observar es una función lineal creciente, a más cajas vendidas, mayor es el valor para cobrar. En este caso si se venden 5 cajas se debe cobra $ 75.

Tabla de valores

x	y
0	0
1	15
2	30
3	45
4	60
5	75
6	90
7	105
8	120
9	135
10	150



Gráfica 79. Valor de cobro según cajas de durazno vendidas

6.5.1.1.3 Conversiones

La conversión de unidades es la transformación del valor numérico de una magnitud física, expresado en una cierta unidad de medida, en otro valor numérico equivalente y expresado en otra unidad de medida de la misma naturaleza. Es de importancia en la agronomía ya que al transformar de una unidad de medida a otra resulta esencial para el análisis y la gestión de los datos pues al expresar cantidades en diferentes unidades de medida se puede comparar datos entre diferentes sistemas de medición.

En la agricultura, las conversiones son especialmente importantes para la medición de variables como la producción, el rendimiento, la fertilidad del suelo, el consumo de agua, la cantidad de plaguicidas utilizados, entre otros. Por ejemplo, para medir la producción de un cultivo, es necesario convertir la cantidad de cosecha de peso o volumen a una unidad de medida común, como toneladas por hectárea. Además, son importantes en la gestión de los recursos naturales, ya que permiten medir y comparar los cambios en las condiciones del suelo y la calidad del agua. Así como también para la elaboración de presupuestos y la toma de decisiones financieras en la agricultura (FAO, 2013a).

ISBN: 978-987-82912-7-7

Entonces, las conversiones ayudan a un mejor entendimiento de lo que se está midiendo, ya que en ocasiones se presentan en unidades que no son interpretativas del sistema internacional pues son unidades de medida propias de la región, como por ejemplo el acre que es utilizado como medida de superficie en Estados Unidos mientras que en Ecuador se utiliza la cuadra, los galones utilizados como unidad de volumen mientras tanto en ocasiones es necesario realizar una estimación en litros para agregar al compuesto de fertilización o plaguicida, o en las unides de masa como libras, kilogramos, para aplicación de fertilizantes edáficos, contrastación de análisis de suelos con requerimientos óptimos de micro y macronutrientes, etc. (Y. Li, 2017).
Existen muchas conversiones importantes en la agronomía, pero aquí se presentan algunas de las más comunes:

1. Conversión de unidades de peso: en la agronomía, es común trabajar con unidades de peso como toneladas métricas, kilogramos y libras. Es importante saber cómo convertir entre estas unidades para poder comparar y analizar datos de manera precisa.

2. Conversión de unidades de volumen: en la agricultura, se miden muchos líquidos y sólidos en volumen, como el agua de riego, los fertilizantes y los productos químicos. Las unidades comunes incluyen galones, litros y metros cúbicos (M. Singh, 2017).

3. Conversión de unidades de área: en la agronomía, es esencial medir la superficie de los campos, cultivos y parcelas. Las unidades comunes incluyen hectáreas, acres y metros cuadrados.

4. Conversión de unidades de temperatura: en la agricultura, es importante conocer la temperatura del suelo, del aire y del agua. Las unidades comunes son Celsius, Fahrenheit y Kelvin.

5. Conversión de unidades de densidad: en la agronomía, es esencial conocer la densidad del suelo, de los fertilizantes y de los productos químicos. Las unidades comunes incluyen kilogramos por metro cúbico y libras por pie cúbico.

Antes de empezar a realizar las conversiones de unidades de medidas, es necesario conocer que unidades de medidas existen, cuáles son las que se usan en la agricultura y sus equivalencias como herramienta para el proceso de conversión.

- **El sistema internacional de unidades (SI) y su aplicación en la agronomía**

Para uniformizar a nivel mundial las medidas se ha adaptado el Sistema Internacional de

ISBN: 978-987-82912-7-7

Unidades (SI), según la Sociedad Americana de Agronomía (ASA), la Sociedad Americana de Ciencia de Cultivos (CSSA) y la Sociedad Americana de Cultivos de Suelo (SSSA) consideran que ha sido de un gran aporte en la uniformidad de estilo y terminología de las medidas en las publicaciones científicas y tecnológicas entre científicos y especialistas agronómicos y otras disciplinas, rompiendo las barreras del idioma y termología de los diferentes países diario (ASA-CSSA-SSSA, 1990). En este apartado se presentan conceptos, simbología y equivalencias útiles para el ingeniero agrónomo en su quehacer.

- **Unidades del sistema internacional**

Las unidades del SI están constituidas por las unidades de base, derivadas y suplementarias (FAO, 2013b).

En la tabla 8, se presentan las siete unidades de base con su símbolo, las unidades y la cantidad que mide, estas son consideradas dimensionalmente independientes.

Tabla 8. Unidades base del sistema internacional

Cantidad	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente Eléctrica	amperio	A
Temperatura Termodinámica	kelvin	k
Cantidad de Substancia	mol	mol
Intensidad Luminosa	candela	Cd

Las unidades que aún no han sido clasificadas ni como unidades de base ni como unidades derivadas se las llama suplementarias y se presentan en la Tabla 9.

Tabla 9. Unidades suplementarias del sistema internacional

Cantidad	Unidad	Símbolo
Angulo plano	Radian	Rad
Angulo sólido	Estereo radián	sr

En la tabla 10, se muestran las unidades derivadas formadas en base a las unidades de base o suplementarias, con su nombre especial y un símbolo particular.

Tabla 10. Unidades derivadas si expresadas en términos de unidades base.

Magnitudes derivadas	Unidad de medida	Símbolo
Volumen	metro cúbico / litro	m^3 o L
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3

ISBN: 978-987-82912-7-7

Frecuencia	Hertz o hercio	Hz
Fuerza	Newton	N
Trabajo y energía	Julio	J
Presión	Pascal	Pa
Potencia	Watio o vatio	W
Carga eléctrica	Columbio	C
Potencial eléctrico	Voltio	V
Resistencia eléctrica	Ohmio	Ω
Dosis de radiación absorbida	Sievert	Sv

- **Unidades útiles en la agronomía**

A continuación, se presentan la Tabla 11, donde se presentan algunas unidades derivadas del sistema internacional con nombres especiales que se utilizan en la agronomía.

Tabla 11. Unidades derivadas del SI de nombres especiales útiles en la agronomía

Cantidad	Nombre	Símbolo	Unidades SI
Viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa.s	$m^{-1}.kg.s^{-1}$
Momento de fuerza	newton metro	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Tensión superficial	newton por metro	N/m	$kg.s^{-2}$
Densidad de flujo de calor, irradiancia	watt por metro cuadrado	W/m^2	$kg.s^{-3}$
Capacidad calorífica, entropía	joule por kelvin	J/K	$m^2.kg.s^{-2}.k^{-2}$
Capacidad calorífica específica, entropía específica	joule por kilogramo kelvin	J/(kg.k)	$m^2.s^{-2}.k^{-1}$
Energía especifica	joule por kilogramo	J/kg	$m^2.s^{-2}$
Conductividad térmica	watt por metro kelvin	W/(m.k)	$m.kg.s^{-3}.k^{-1}$
Densidad de energía	joule por metro cúbico	J/m^3	
Fuerza de campo eléctrico	voltio por metro	V/m	
Densidad de carga eléctrica	coulomb por metro cúbico	C/m^3	
Densidad de flujo eléctrico	coulomb por metro cuadrado	C/m^2	
Permitibilidad	faradio por metro	F/m	$m^{-3}.kg^{-1}.A^2.s^4$
Energía molar	joule por mol	J/mol	$m^2.kg.s^{-2}.mol^{-1}$
Entropía molar, capacidad calorífica molar	joule por mol kelvin	J/(mol.k)	
Exposición (rayos x e y)	coulomb por kilogramo	C/kg	
Razón de dosis absorbida	gray por segundo	Gy/s	mol^{-1}
Permeabilidad	henry por metro	H/m	$m.kg.A^{-2}.s^{-2}$

En la Tabla 12, se muestran las unidades de medida de uso general en la agronomía algunas de ellas son aceptadas (A) y otras las preferidas (P), aquí se menciona algunas que se ocupan para área, volumen física y química de suelo, tasa fotosintética, rendimiento, contenido de agua, conductividad eléctrica y otros.

Tabla 12. Unidades para uso general agronomía

ISBN: 978-987-82912-7-7

Cantidad/Tasa	Aplicación	Unidad	Símbolo
Angulo	patrón de difracción de rayos x	radián (P)	θ
		grado (A)	°
Área	área de tierra	metro cuadrado (P)	m^2
		hectárea (A)	ha
	superficie especifica del área del suelo	metro cuadrado por kilogramo	$m^2\ kg^{-1}$
Espacio Interatómico	estructura del cristal	nanómetro (P)	nm
		Angstróm (A)	°A
Densidad Aparente	Densidad aparente del suelo	Megagramo por metro cúbico (P)	$Mg\ m^{-3}$
		Gramos por centímetro cúbico (A)	$g\ cm^{-3}$
Conductividad Eléctrica	tolerancia de sales	decisiemen por metro	$dS\ m^{-1}$
Tasa de elongación	plantas	milímetro por segundo (P)	$mm\ s^{-1}$
		milímetro por día (A)	$mm\ d^{-1}$
Ión extraído	basado en masa de suelo	centímoles por kilogramo (P)	$cmol\ kg^{-1}$
		miligramo por kilogramo (A)	$mg\ kg^{-1}$
	basado en volumen de suelo	moles por metro cúbico (P)	$mol\ m^{-3}$
		gramo por metro cúbico (P)	$gm\ m^{-3}$
		centímoles por litro (A)	$cmol\ l^{-1}$
		miligramo por litro (A)	$mg\ l^{-1}$
Tasa de Fertilizante	suelo	gramo por metro cuadrado (P)	$gm\ m^{-2}$
		kilogramo por hectárea (A)	$kg\ ha^{-1}$
Tasa de crecimiento	crecimiento de plantas	Gramo por metro cuadrado por segundo	$gm\ m^{-2}s^{-1}$
Conductividad hidráulica	flujo de agua	kilogramo segundo por metro cúbico (P)	$kg\ s\ m^{-3}$
		metro cúbico segundo por kilogramo (A)	$m^3\ s\ kg^{-1}$
Transporte Iónico	asimilación iónica	moles por kilogramo por segundo (tejido seco)	$mol\ kg^{-1}s^{-1}$
		Mol de carga por kilogramo por segundo	$mol_c kg^{-1}s^{-1}$
Tasa de Área Foliar	planta	metro cuadrado por kilogramo	$m^2\ kg^{-1}$
Longitud	profundidad, altura, ancho	metro (P)	m
		centímetro (A)	cm
		milímetro (A)	mm
Concentración de Nutrientes	plantas	milimoles por kilogramo (P)	$mmol\ kg^{-1}$
		gramo por kilogramo (A)	$gm\ kg^{-1}$
Tasa Fotosintética	cantidad de flujo de CO_2 de una sustancia (P)	Micromoles por metro cuadrado por segundo	$umol\ m^{-2}s^{-1}$

ISBN: 978-987-82912-7-7

	densidad de flujo de CO_2	Miligramo por metro cuadrado por segundo (A)	$mg\ m^{-2}\ s^{-1}$
Precipitación	lluvia	milímetros	mm
Composición de la textura del suelo	suelo	gramo por kilogramo (P)	$g\ kg^{-1}$
		porciento (A)	%
Tasa de transpiración	densidad de flujo de agua	Gramo por metro cuadrado por segundo (P)	$gm\ m^{-2}s^{-1}$
		metro cúbico por metro cuadrado por segundo (A)	$m^3m^{-2}s^{-1}$
		metro por segundo (A)	$m\ s^{-1}$
Volumen	campo o laboratorio	metro cúbico (P)	m^3
		litro (A)	l
Contenido de aguas	plantas	gramo de agua por kilogramo de peso seco de tejido (P)	$g\ k^{-1}$
		kilogramo de agua por kilogramo de suelo seco (P)	$kg\ kg^{-1}$
		metro cúbico de agua por metro cúbico de suelo	m^3m^{-3}
Rendimiento	grano o forraje	Gramo por metro cuadrado (P)	$g\ m^{-2}$
		kilogramo por hectárea (A)	$kg\ ha^{-1}$
		megagramo por hectárea (A)	$Mg\ ha^{-1}$
		tonelada por hectárea (A)	$t\ ha^{-1}$

PREFERIDAS (P) Y ACEPTADAS (A)

- **Factores de conversión**

También, es necesario conocer las equivalencias de unidades similares para el proceso de conversión. En las siguientes tablas se presentan las más utilizadas y el factor de conversión que se ha de utilizar para transformar un a en otra (Cropaia1, 2020).

En la tabla 13, presentan los factores para convertir formas de nutrientes.

Tabla 13. Unidades agrícolas **f**ormas de nutrientes

De	A	Multiplicar por
NH_4	$N\text{-}NH_4$	0.821
NO_3	$N\text{-}NO_3$	0.226
N	NH_4	1.285
N	NO_3	4.427
P_2O_5	P	0.436
PO_4	P	0.326
P	P_2O_5	2.291
P	PO_4	3.066
K_2O	K	0.830
K	K_2O	1.205
$CaCO_3$	Ca	0.400
CaO	Ca	0.714
Ca	$CaCO_3$	2.497

ISBN: 978-987-82912-7-7

MgO	Mg	0.603
Mg	MgO	1.657

En la tabla 14, se presentan los equivalentes de concentración de elementos, estas posteriormente serán utilizada en los ejercicios de análisis de laboratorio.

Tabla 14. Unidades agrícolas de concentración

Elemento	**mmol/L**	**meq/L**	**ppm**
$N\text{-}NO_3$	1	1	14
$N\text{-}NH_4$	1	1	14
$P\text{-}H_2PO_4$	1	1	31
K	1	1	39
Ca	1	2	40
Mg	1	2	24
Na	1	1	23
Cl	1	1	35.5
$S\text{-}SO_4$	1	2	32
Fe	1	3	56
Mn	1	2	55
Zn	1	2	65
Cu	1	2	64
$B\text{-}B_4O_7$	1	2	11

Una acción recurrente en los procesos agronómicos es la fertilización, en la tabla 15, se muestras los factores de conversión para dosificar fertilizantes.

Tabla 15. Unidades agrícolas dosis de fertilizantes

De	**A**	**Multiplicar por**
kg/ha (kilogramos por hectárea)	lb/ac (libras por acre)	0.892
lb/ac	kg/ha	1.120
MT/ha (Metric tonne/hectare)	tons/acre (tonelada corta/acre)	0.446
tons/acre (tonelada corta/acre)	MT/ha (tonelada/hectárea)	2.240

También se puede visualizar en la Tabla 16, los cambios de medidas para calcular el rendimiento de un cultivo.

Tabla 16. Unidades agrícolas de rendimiento

De	**A**	**Multiplicar por**
Bushel/acre maíz	MT/ha maíz	62.8
Bushel/acre maíz	lbs/acre maíz	56.0
Bushel/acre trigo/soja	kg/ha trigo/soja	67.3
Bushel/acre trigo/soja	lbs/acre trigo/soja	60.0
Bushel/acre cebada	kg/ha cebada	53.8

Dentro de las unidades agrarias se encuentra las que ayudan medir la extensión de una finca o un terreno y su unidad principal es el área, ver Tabla 17**.**

ISBN: 978-987-82912-7-7

Tabla 17. Unidades agrícolas de área

Hectárea (ha)	1 hm^2	10000 m^2
Área (a)	1 dam^2	100 m^2
Centiárea (ca)	1 m^2	

Estas tablas se han colocado como herramienta para la conversión de unidades, aunque no son todas, se encuentran las más utilizadas.

6.5.1.1.4 Factores de conversión como función

Los factores de conversión permiten cambiar las unidades y también se pueden representar con la función más simple.

Para la explicación se considera la conversión de Kilometro a metros, entonces se tiene 55 Km a transformar en metros.

$$1\,Km\ -----\ 1000\ m$$
$$55\,Km\ ------\ y$$
$$55\,Km * 1000\,m = y * 1\,Km$$
$$y = \frac{55\,Km * 1000\,m}{1\,Km}$$
$$y = 55000\,m$$

Como se puede observar en el procedimiento, se está haciendo lo mismo que la regla de tres o la función lineal que en este caso cruza por el (0,0), donde la variable independiente es x o cualquier valor que se desea, en el ejemplo convertir $x = 55$. Pero como no necesariamente en otras conversiones debe cruzar por el origen, por lo tanto, se escribe de una forma generalizada, así:

$$y = mx + n$$

Donde:

m, es la pendiente, factor de crecimiento o derivada.

n, valor del cruce de la recta con el eje Y

A modo de ejemplificar lo anteriormente expuesto, se presenta la transformación de grados de grados Celsius a Kelvin. Para ello se sabe que 0 °C son 273 °K. Entonces se tiene una función lineal con pendiente 1 y cruza en el eje vertical en el 273. Gráficamente tiene una pinta así (Gráfico 80):

La función que indica a cuántos grados kelvin corresponde los grados Celsius indicados es:

$$K(C) = C + 273$$

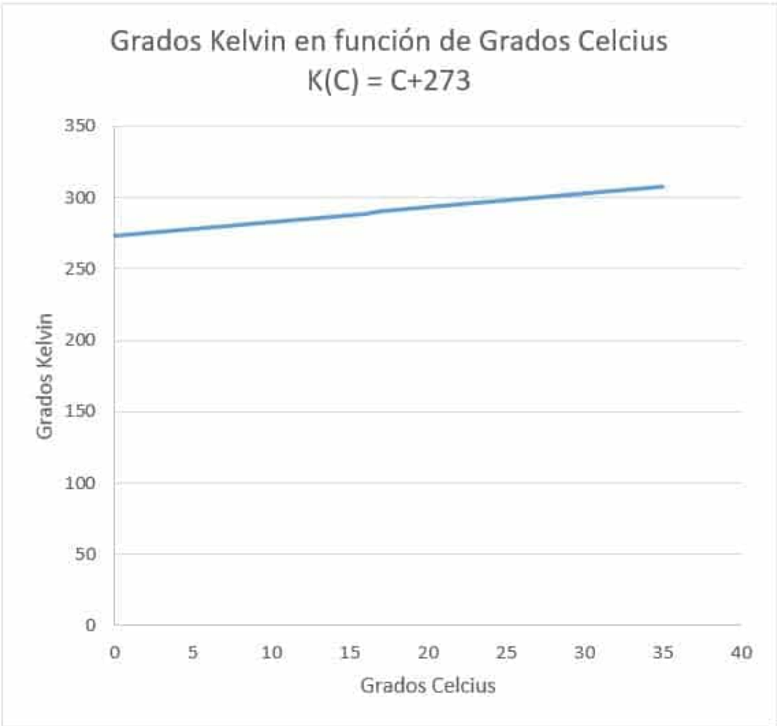
Donde:

ISBN: 978-987-82912-7-7

C, grados Celsius, variable independiente

K, grados Kelvin en función de los grados Celsius

Se puede observar en la gráfica que la recta no cruza por origen, ya que el valor independiente es 273.



Gráfica 80. Conversión °C a °K

A continuación, se destacan algunas conversiones de unidades de uso común en el quehacer agrícola, se explica su proceso e interpretaciones para la toma de decisiones.

libra a kilogramo

La Sección de Postcosecha envía 500 libras. de tomates a la Sección de Tecnología, ¿cuántos kilogramos equivale esta cantidad?

$$2.2lb \qquad 1\ kg$$

$$500\ lb \qquad x$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{500\ lb * 1\ Kg}{2.2lb}$$

$$x = 227{,}27\ kg$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

gramo a kilogramo

En un invernadero existen 10000 plantas, se desea calcular cuantos kg de abono orgánico se necesita para todas las plantas, sabiendo que en cada planta debe se debe incorporar 450 g.

$1000g$ 1Kg

$450\ g$ x

$x = \dfrac{450\ g * 1\ kg}{1000\ g} x = 0.45\ kg * 10000\ plantas$

$x = \ 0.45\ kg$

0.45 kg necesita cada planta, a esto lo multiplicamos por las 10000 plantas

$x = 0.45\ kg * 10000\ plantas$

$x = 4500\ kg$

quintal a kilogramo

En una finca existen 20 hectáreas de banano para las cuales se compran 35 qq de fosfato diamónico un estimulante de crecimiento y desarrollo. Al finalizar las labores de voleo ha sobrado 20 kg de fosfato diamónico. Transformar los qq a kg para determinar en qué cantidad ha sobrado el fertilizante.

Se sabe que $1\ qq = 100\ lb$. Entonces:

$2.2\ lb$ $1\ kg$

$100\ lb$ x

$$x = \frac{100\ lb * 1\ kg}{2.2\ lb}$$

$x = 45.45\ kg$

Un qq tiene 45,45 kg y no sobro 20 kg de la fertilización entonces nos sobro un poco menos de la mitad del quintal.

ISBN: 978-987-82912-7-7

$x = 35\ qq * \ 45.45\ kg$

$x = 1590{,}75\ \ kg\ total$

litros a centímetro cubico

Un agricultor tiene 20 l de un herbicida y quiere saber cuántos cm^3. tiene.

$$20\ l * \frac{1000\ cm^3}{1l} = 20000\ cm^3$$

litros a galones

Un Agrónomo quiere poner 13 l de un plaguicida en envases de 1 galón. ¿Cuántos galones estadounidenses podría llenar?

$$13\ l * \frac{0.2642\ gal}{1\ l} = 3{,}4346\ galones$$

Metro cubico por segundo a litros por segundo

Un agricultor necesita ocupar 35 metros cúbicos de agua para regar una hectárea de cultivo cuantos litros por segundo se necesitará:

$$35\frac{m^3}{s} \cdot \frac{35000\ l}{35\ m^3} = 35000\ \frac{l}{s}$$

El granjero necesita 35000 l de agua

Gramos por centímetro cuadrado a kilogramo por hectárea

Si un centímetro cubico de suelo pesa 2 gramos ¿Cuántos kilogramos pesará una hectárea?

$$2\frac{g}{cm^3} \cdot \frac{100000\ kg/ha}{1\ g/c^3} = 200000\ kg/ha$$

Kilocalorías/Kilogramos a Julio por gramo

$130\ kcal \rightarrow J$

$$130\ kcal\ \frac{1000\ cal}{1\ kcal} = 130\ 000$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$130\ 000\ cal\ \frac{4.1868\ J}{1\ cal} = 544\ 284\ julio$$

Mililitro por segundo a galones por hora

La manguera de un invernadero tiene un flujo de agua de 50 mililitros por segundo convertir a galones por hora.

$$\frac{50\ ml}{s}\left|\frac{0.1\ l}{1ml}\right|\ \frac{0.00264\ gal}{1\ l}\ \ \frac{3600\ s}{1h}$$

$$50 * 0.1 * 0.00264 * 3600 = \frac{47.55}{1}\frac{gal}{h}$$

Julio a electro voltio

Si la energía de ionización de un átomo de hidrogeno es $2.195X10^{-18}$ J, ¿a cuántos electronvoltios equivale esta energía?

$$eV: 2{,}195X10^{-18}\ J\ * \frac{1\ eV}{1{,}602\ x10^{-19}\ J}$$

$$eV: 13{,}7$$

Kilogramo por hectárea y libras por acre

Los laboratorios de suelo pueden reportar los resultados del análisis de suelo en diferentes unidades, para los productores y los ingenieros agrónomos a veces es confuso interpretar cuando no están escritas en otras unidades, esto también varía según el laboratorio, incluso si utilizaron los mismos métodos de extracción. Las unidades más utilizadas para expresar la concentración de elementos extraídos son *ppm, mg/kg, mg/l, mmol/l, meq/100g, meq/l, cmol+/kg, lbs/acre y kg/ha* (Arcos, 2013) .

Los niveles de nutrientes en algunos laboratorios se expresan en *kg/ha o lbs/acre*. Las unidades en el informe del análisis de suelo se obtienen de los valores de *ppm (mg/kg)*. Para calcular la cantidad de un nutriente o un elemento en un área específica, se debe conocer la densidad aparente del suelo y la profundidad de la capa del suelo que representan los resultados, como una profundidad predeterminada para el cálculo de la cantidad de los elementos, en su mayoría de los laboratorios utilizan 20 *cm* (8 pulgadas) o 30 *cm* (12 *pulgadas*) (Cropaia, 2021).

ISBN: 978-987-82912-7-7

A continuación, el desarrollo de un ejemplo:

Un análisis de suelo muestra un nivel de fósforo Olsen de 15 *ppm.* ¿Cuántos kilogramos de fósforo Olsen hay en una hectárea?, Considere una densidad aparente del suelo de 1,35 *tonelada/m*^{3} y una profundidad de 20 *cm*.

Datos:

Densidad aparente del suelo es $1{,}35\,\frac{tonelada}{m^3}$

Profundidad de capa de suelo es $20\ cm$

$$ha\ =\ 10000\ m^2$$

Entonces el volumen de la capa es:

$$10000\ m^2\ x\ 0{,}2\ m\ =\ 2000\ m^3$$

Para calcular el peso de la capa de suelo, se utiliza el dato de la densidad aparente:

$$2000\ m^3 * 1{,}35\,\frac{tonelada}{m^3} = 2700\ tonelada$$

Para convertir las toneladas en Kilogramos se tiene:

$1\ tonelada =\ 1000\ kg$

$$2700\ tonelada * \frac{1000\ kg}{tonelada} =\ 2700000\ kg$$

Ahora para transformar a $\frac{kg}{ha}$, se sabe que:

$$15\ ppm =\ 15\,\frac{mg}{kg}$$

Entonces en $2700000\ kg$ se tiene:

$$15\ \frac{mg}{kg} * \frac{2700000\ kg}{1000000\,\frac{mg}{kg}} =\ 40.5\ \frac{kg}{ha}$$

De aquí que para un suelo con una densidad aparente de $1{,}35\,\frac{tonelada}{m^3}$ y profundidad de capa de $20\ cm$, $15\ ppm = 40.5\ \frac{kg}{ha}$.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Como se puede ver, la conversión de ppm a kg/ha o lbs/acre no requiere el uso del peso molecular o la carga del elemento. Entonces para la misma profundidad de capa y densidad aparente, el cálculo anterior es el mismo para 15 ppm de potasio, calcio o cualquier otro elemento.

Y para convertir ppm a kg/ha, en unidades métricas, se tiene la ecuación:

$$\frac{kg}{ha} = ppm * P * \frac{DA}{10}$$

Dónde:

P, profundidad de la capa de suelo en cm

DA, densidad aparente en $\frac{tonelada}{m^3}$

Ahora se va a realizar la conversión de kg/ha a lbs/acre, para ello considere que:

$1\ kg\ =\ 2.20\ lbs$

$1\ ha\ =\ 2.47\ acres$

De lo que se obtiene:

$$1\ \frac{kg}{ha} = \frac{2.20\ lbs}{2.47\ acre} = 0.89\ \frac{lbs}{acre}$$

Y para convertir lbs/acre, en unidades imperiales es, se tiene la ecuación:

$$\frac{Lbs}{acre} = ppm * P * \frac{DA}{275}$$

Dónde:

P, profundidad de la capa de suelo en $pulgadas$

DA, densidad aparente en $\frac{lbs}{pies^3}$

Se tiene como resultado que 15 ppm fósforo en una profundidad de capa de suelo de 8 pulgadas y densidad aparente de 84 lbs/pie^3 son:

$$\frac{15 * 8 * 84}{275} = 36.6\frac{lbs}{acre}$$

Milimol por litro

ISBN: 978-987-82912-7-7

Esta unidad se utiliza para expresar la concentración de elementos en la solución del suelo. Se conoce que:

$$1\frac{mmol}{l} = \frac{ppm}{Mw}$$

Esto se describe como: ppm es concentración y se refiere a mg/l y Mw es el peso molecular del elemento en mmol/mg.

A continuación, se presenta el desarrollo de un ejemplo:

Se requiere convierta 100 ppm de Mg^{2+} a $mmol$

Para eso es necesario consultar el peso molecular del magnesio, el cual es de 24,3 $\frac{mmol}{mg}$.

Entonces se tiene:

$$\frac{100}{24.3} = 4.11\frac{mmol}{l}$$

Con esto se concluye que 100 ppm de Mg^{2+} equivale a $4.11\frac{mmol}{l}$

6.5.1.2 Modelado con funciones grado n

Dentro de las funciones polinómicas se encuentran las de grado superior a uno, estas son herramientas útiles para la modelización matemática en la agricultura debido a su capacidad para describir relaciones no lineales entre variables, se utilizan ampliamente en la agricultura para describir y predecir el crecimiento de los cultivos, la producción de biomasa, la absorción de nutrientes, la respuesta a los niveles de riego y fertilización, entre otros aspectos.

Un ejemplo concreto es el uso de modelos polinómicos para predecir el rendimiento de los cultivos en función de la cantidad de fertilizante aplicado. En un estudio realizado por Garg, (2019), se utilizaron modelos polinómicos de segundo grado para predecir el rendimiento del cultivo de tomate en función de la cantidad de fertilizante aplicado. Los resultados mostraron que el modelo polinómico de segundo grado era más preciso para predecir el rendimiento que otros modelos lineales.

Otro ejemplo es el uso de modelos polinómicos para predecir el crecimiento de los árboles. En un estudio realizado por Jiang, (2020), se utilizaron modelos polinómicos de

ISBN: 978-987-82912-7-7

tercer grado para modelar el crecimiento del diámetro y la altura de los árboles de olivo. Los resultados mostraron que los modelos polinómicos de tercer grado eran más precisos para predecir el crecimiento que los modelos lineales.

En resumen, las funciones polinómicas son herramientas valiosas para la modelización matemática en la agricultura debido a su capacidad para modelar relaciones no lineales entre variables. Los modelos polinómicos se utilizan ampliamente para predecir el crecimiento de los cultivos, la producción de biomasa, la absorción de nutrientes, la respuesta a los niveles de riego y fertilización, entre otros aspectos.

6.5.1.2.1 Modelado con funciones cuadráticas

Los polinomios cuadráticos son funciones algebraicas cuadráticos, son útiles para modelar diferentes procesos, desde el crecimiento de los cultivos hasta la optimización del uso de recursos. Su importancia radica en su capacidad para modelar de manera precisa y eficiente una amplia variedad de fenómenos agrícolas que pueden ser complejos y variables. En particular, son muy útiles para analizar y predecir el comportamiento de los cultivos en función de diferentes variables como la temperatura, la humedad, la fertilidad del suelo, entre otras.

A continuación, se describen ejemplos de la importancia de los polinomios cuadráticos en la agricultura:

Para modelar el crecimiento de los cultivos en función de diferentes variables, un estudio realizado por X. Li, (2020), se utilizó un polinomio cuadrático para analizar el efecto de la temperatura en el crecimiento del tomate, los resultados mostraron que el crecimiento de la planta se veía favorecido por una temperatura óptima de entre 23 y 25 grados Celsius. Otro modelo de crecimiento de los cultivos en función de variables como la temperatura, la humedad, la cantidad de luz y la disponibilidad de nutrientes es el estudio realizado por (Rabelo, 2018), utilizó un polinomio cuadrático para modelar el crecimiento del cultivo de tomate en función de la dosis de nitrógeno aplicada.

Para optimizar el uso de recursos en la agricultura, un estudio realizado por Duan, (2017), utilizó un polinomio cuadrático para optimizar la cantidad de agua utilizada en el cultivo de maíz, los resultados mostraron que se podía obtener una alta producción de maíz con un consumo óptimo de agua y el estudio de Ma, (2016), donde se utilizó un polinomio cuadrático para optimizar el uso del agua en el cultivo de arroz.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Para analizar la fertilidad del suelo, en el estudio de Pandey, (2019) se utilizó un polinomio cuadrático para analizar la relación entre la materia orgánica del suelo y la producción de arroz, los resultados mostraron que un aumento en la materia orgánica del suelo se asociaba con una mayor producción de arroz.

Para modelar sistemas completos de producción agrícola, desde la siembra hasta la cosecha y el procesamiento. El estudio realizado por Asadi-Shekari, (2015), utilizó un polinomio cuadrático para modelar la producción de trigo en función de la cantidad de agua y nitrógeno aplicados.

A continuación, se presenta el desarrollo de algunos ejercicios con la aplicación de modelos cuadráticos:

6.5.1.2.1.1 Modelo extinción de abejas

En una isla se siembra una cierta variedad de frutales, el problema es la polinización por lo cual se introduce abejas, la mayor cantidad de abejas se observó a los 11 días con 4410 ejemplares, pero en el día 32 se extinguieron, se requiere analizar lo sucedido, para ello es necesario encontrar la función que describe la evolución, cuántas abejas fueron introducidas y responder en qué día la población fue de 4250 abejas.

Definición de variables:

t, tiempo, variable independiente [días]

n, número de abejas en función del tiempo

Datos:

$t = 11$

$n(11) = 4410$

$$n(32) = 0$$

En este caso es necesario analizar los datos observados, $n(11) = 4410$, es el número máximo de abeja que existieron, desde este punto de vista se puede pensar en una función que permita observar un valor máximo como es una función cuadrática cuya grafica es una parábola cóncava ya que tiene un valor máximo por lo tanto la función está dada por:

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$n(t) = a(t + n_x)^2 + n_y$$

Donde:

n_x, corresponde a la coordenada de las abscisas del vértice o punto máximo.

n_y, corresponde a la coordenada de las ordena del vértice o punto máximo

a, constante.

Entonces quedaría de la siguiente manera:

$$n(t) = a(t - 11)^2 + 4410$$

Ahora es necesario encontrar el valor de a, para expresar la función que describe el fenómeno que estamos estudiando, paralo cual se considera el valor de $t = 32$, en el cual se sabe que las abejas se extinguieron por lo tanto $n(32) = 0$.

En este caso la función anterior queda de la siguiente manera:

$n(32) = a(32 - 11)^2 + 4410$

$0 = a(21)^2 + 4410$

$$a = -10$$

Este valor completa la expresión que determina la evolución de las abejas.

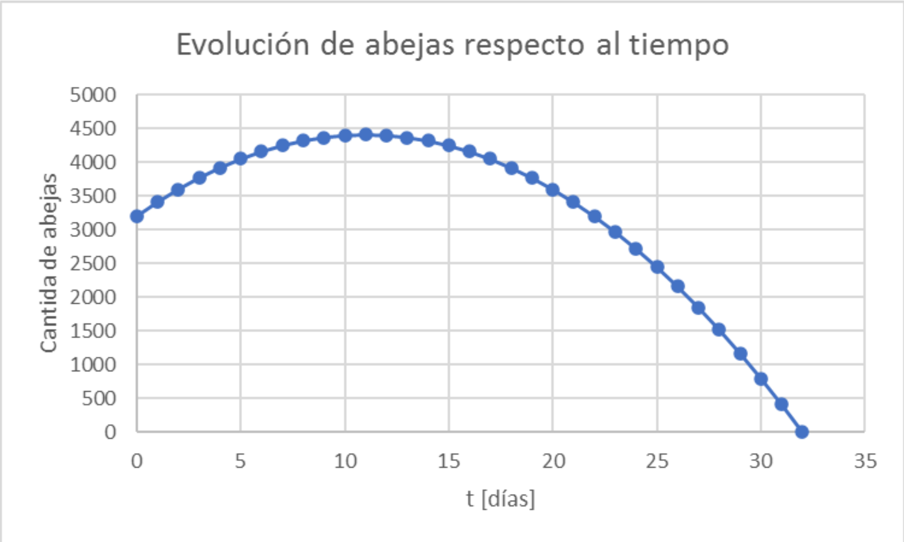
$$n(t) = -10(t - 11)^2 + 4410$$

Ahora, se realiza el análisis visual mediante la traficación:

ISBN: 978-987-82912-7-7

Valores

t [días]	n
0	3200
1	3410
2	3600
3	3770
4	3920
5	4050
6	4160
7	4250
8	4320
9	4370
10	4400
11	4410
12	4400
13	4370
14	4320
15	4250
16	4160
17	4050
18	3920
19	3770
20	3600
21	3410
22	3200
23	2970
24	2720
25	2450
26	2160
27	1850
28	1520
29	1170
30	800
31	410
32	0



Gráfica 81. Evolución de abejas introducidas

Como se puede observar en la gráfica el dominio de la función en un contexto real solo puede tomar valores el tiempo desde 0 hasta el momento que se extinguieron que es el día 32, por lo tanto, $Dom(n) = [0,32]$.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Adicional a esto también se puede visualizar un valor aproximado de abejas de 3250 abejas que se introdujeron, pero el cálculo se va a realizar matemáticamente para obtener un valor exacto, esto sucede en $t = 0$. Por lo tanto, se tiene:

$$n(0) = -10(0-11)^2 + 4410$$

$$n(0) = -10(11)^2 + 4410$$

$$n(0) = -10(121) + 4410$$

$$n(0) = -1210 + 4410$$

$$n(0) = 3200$$

De esto se sabe, que el número de abejas que se introdujeron fue de 3200.

Ahora, por último, se debe calcular el dato solicitado del estudio de cuando existieron 4250 abejas. Para ello la ecuación queda así:

$$4250 = -10(t-11)^2 + 4410$$

$$\frac{4250 - 4410}{-10} = (t-11)^2$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{(t-11)^2}$$

$$4 = t - 11$$

$$t = 15$$

En el día 15 existieron 4250 abejas.

6.5.1.2.2 Modelo precio óptimo

Una Quinta se dedica a la producción de tomate de árbol, en la tabla a continuación se presentan las ventas anuales de cajas de tomate de árbol que ha realizado, es necesario hallar el precio de cada caja que genera máxima ganancia, sabiendo que el costo de producción por caja es de $ 10.

18 Tabla 19. Precio de cajas

Precio de venta [$]	Cantidad de cajas vendidas en el año
10	1000
15	900

ISBN: 978-987-82912-7-7

20	800
25	700

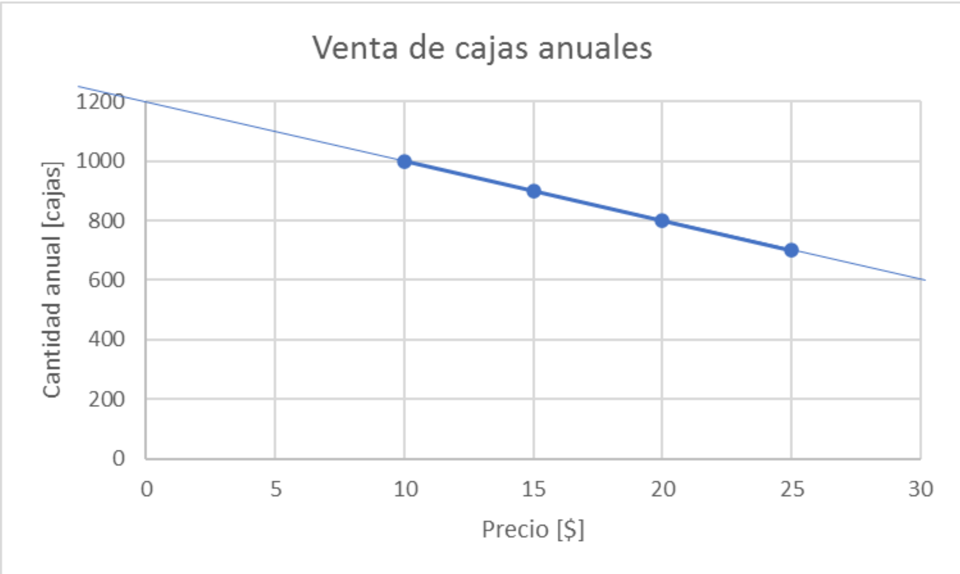
Para determinar la utilidad se considera las ventas menos los costos, la ecuación de la utilidad del ejercicio es:

$$U = V - C$$

Donde:

U es utilidad, V es ventas y C es costos.

Entonces de problema se conoce que la cantidad de cajas vendidas están representadas por la gráfica de los puntos en la gráfica 82, de la siguiente manera:



Gráfica 82. Número de cajas de tomate vendidas

Sí, se analiza visualmente la función, se puede observar que mientras aumenta el precio de la caja de tomate se venden menos unidades, por lo tanto, es una función lineal decreciente, que cuando se el precio es cero el número de cajas vendida es 1200, este valor representa la intersección con el eje vertical.

Entonces la función del número de cajas vendidas anuales en función del precio es la siguiente:

$$q = mp + b$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Donde, p, es el precio y m, el valor de la pendiente y se calcula de la siguiente manera:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{900 - 1000}{15 - 10}$$

$$m = \frac{-100}{5}$$

$$m = -20$$

Entonces con estos datos la ecuación de la recta del número de cajas vendidas anualmente sería:

$$q = -20p + 1200$$

Entonces:

$$V = qp$$

$$V = (-20p + 1200)p$$

$$C = 10q$$

$$C = 10(-20p + 1200)$$

Entonces la utilidad es la siguiente:

$$U = (-20p + 1200)p - 10(-20p + 1200)$$

$$U = -20p^2 + 1400p - 1200$$

Y al ser una función de optimización ya que se requiere conocer el mejor precio que permita la máxima ganancia se tienen una función cuadrática cuya grafica representa una parábola cóncava cuyo vértice es el punto máximo por lo tanto el valor del vértice en el componente del eje horizontal es:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Donde, a, representa el creciente del termino cuadrático y b, el coeficiente del término lineal.

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$x_v = \frac{-1400}{2(-20)}$$

$$x_v = \frac{-1400}{-40}$$

$$x_v = 35$$

El precio óptimo para para obtener la máxima ganancia de a caja de tomate es de $ 35.

6.5.1.3 Modelado con funciones racionales

Las funciones racionales también tienen aplicaciones en la agricultura, como en la modelación del crecimiento de plantas y la relación entre la cantidad de nutrientes y la producción de cosechas. Por ejemplo, se pueden utilizar modelos matemáticos basados en funciones racionales para determinar la cantidad óptima de fertilizantes necesarios para una cosecha específica (Singha, 2016).

La función racional también tiene aplicaciones en la agricultura, en particular en el análisis de los sistemas de riego y la dinámica del agua en el suelo. Esta función se utiliza para modelar la tasa de infiltración del agua en el suelo y para predecir la cantidad de agua disponible para las plantas. También para describir la tasa de infiltración del agua en el suelo y la relación entre la humedad del suelo y la conductividad hidráulica. Existen modelos que utilizan funciones racionales para simular la dinámica del agua en el suelo bajo diferentes condiciones de riego y clima (Rencz, 2015).

Un ejemplo de aplicación de la función racional en la agricultura es el trabajo de Jovanovic, (2019), donde se desarrolla un modelo de simulación de la infiltración del agua en el suelo para la gestión del riego en viñedos. Este modelo utiliza una función racional para describir la tasa de infiltración y se ajusta a los datos de campo para predecir la cantidad de agua disponible para las plantas.

6.5.1.3.1 Modelado de crecimiento de raíces en función de la profundidad del suelo

El modelo de crecimiento de las raíces de las plantas de fréjol en función de la profundidad del suelo, la hipótesis de este modelo es que las raíces crecerán más lentamente a medida que se profundizan en el suelo debido a la disminución de la disponibilidad de agua y nutrientes.

La función racional utilizada para modelar este comportamiento es:

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$f(x) = \frac{a}{1 + bx}$$

Donde:

$f(x)$, longitud de las raíces de las plantas de frijol [cm]

x, profundidad del suelo, variable independiente [cm]

a, constante, parámetro que controla el crecimiento máximo de las raíces

a y b, constantes que deben ser determinadas a partir de los datos experimentales

Para realizar los cálculos, considere los siguientes datos de longitud de raíces de las plantas de frijol en diferentes profundidades del suelo:

Tabla 20. Longitud de raíces según profundidad de suelos

Profundidad del suelo (x)	**Longitud de raíces (y)**
5	3.5
10	4.2
15	4.5
20	4.8
25	5.0

Para ajustar la curva de la función racional a estos datos, se pueden utilizar las siguientes fórmulas:

$$b = \frac{\frac{\Sigma x_i y_i}{n} - \frac{\Sigma x_i \Sigma y_i}{n}}{\frac{\Sigma {x_i}^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}}$$

$$a = \frac{\Sigma y_i}{n} - b\frac{\Sigma x_i}{n}$$

Donde:

n, número de datos

Σx_i, suma de las profundidades del suelo

Σy_i, suma de las longitudes de raíces

$\Sigma x_i y_i$, suma del producto de las profundidades del suelo y las longitudes de raíces.

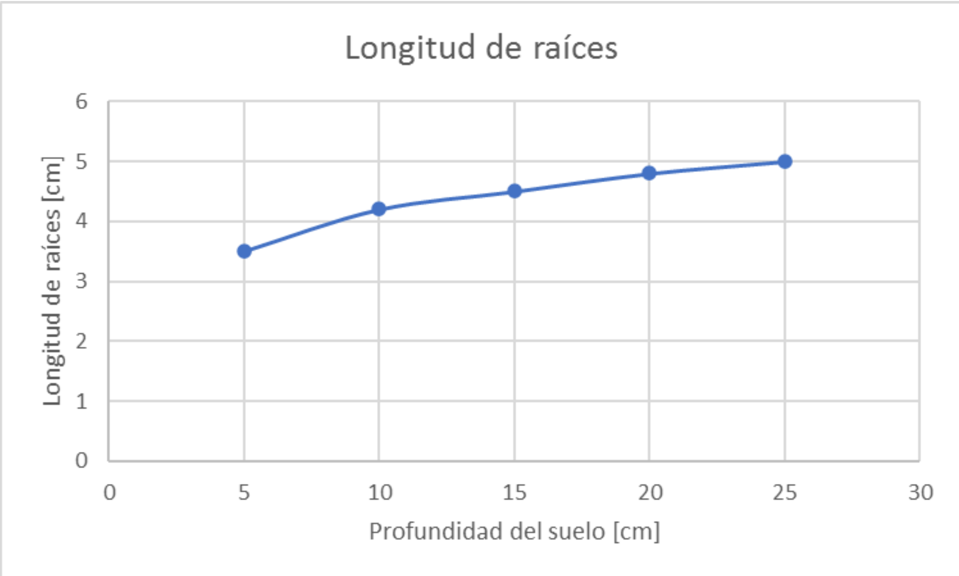
Aplicando estas fórmulas, se obtienen los siguientes valores de las constantes $a = 4.093$ y $b = 0.035$.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Por lo tanto, la función racional que describe el modelo de crecimiento de las raíces de las plantas de frijol en función de la profundidad del suelo es:

$$f(x) = \frac{4.093}{1 + 0.035x}$$

Este modelo puede ser utilizado para predecir la longitud de las raíces de las plantas de frijol en diferentes profundidades del suelo. En la gráfica 83, se presenta este comportamiento.



Gráfica 83. Longitud de raíces según profundidad del suelo

6.5.1.3.2 Modelado de predicción de aversión de nutrientes en el suelo

El modelo de predicción de aversión de nutrientes en el suelo por parte de los cultivos también puede ser representado mediante una función racional, que relaciona la cantidad de nutrientes extraídos por el cultivo con la cantidad de nutrientes disponibles en el suelo (Chen, 2017).

Esta función racional puede ser expresada de la siguiente manera:

$$N = \frac{k * NF}{1 + a * NF}$$

Donde:

N, cantidad de nutrientes extraídos por el cultivo

k, coeficiente de extracción de nutrientes del cultivo

NF, cantidad de nutrientes disponibles en el suelo

a, parámetro de sensibilidad del cultivo a la disponibilidad de nutrientes en el suelo

ISBN: 978-987-82912-7-7

Esta función racional representa la relación no lineal entre la cantidad de nutrientes extraídos por el cultivo y la cantidad de nutrientes disponibles en el suelo. A medida que la cantidad de nutrientes disponibles en el suelo aumenta, la cantidad de nutrientes extraídos por el cultivo también aumenta, pero a una tasa decreciente. La constante a controla la tasa de crecimiento de la relación entre la extracción de nutrientes y la disponibilidad de nutrientes (Escalant, 2008).

A continuación, se presenta el desarrollo de un ejemplo:

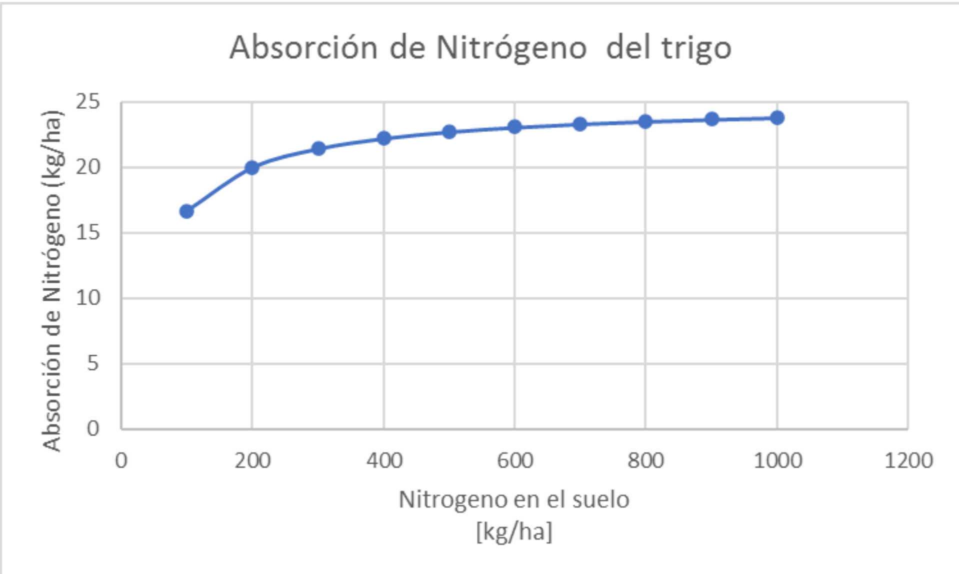
Se desea predecir la cantidad de nitrógeno extraído por un cultivo de trigo a partir de la cantidad de nitrógeno disponible en el suelo, el coeficiente de extracción de nitrógeno del trigo es de 0.5 *kg/kg*, y que el parámetro a es 0.02 kg/kg. Además, se sabe que la cantidad de nitrógeno disponible en el suelo es de 100 kg/ha.

Para calcular la cantidad de nitrógeno extraído por el trigo utilizando la función racional, se debe reemplazar los valores conocidos en la ecuación:

$$N = \frac{0.5\frac{kg}{kg} * \ 100\frac{kg}{ha}}{1 + 0.02\frac{kg}{kg} * 100\frac{kg}{ha}}$$

$$N = 16.67 \ \frac{kg}{ha}$$

Por lo tanto, en este ejemplo hipotético, se espera que el cultivo de trigo extraiga alrededor de 16.67 kg/ha de nitrógeno del suelo.



Gráfica 84. Absorción de nitrógeno del trigo según disponibilidad en suelo

ISBN: 978-987-82912-7-7

En la gráfica 84, se presenta la gráfica de la absorción del nitrógeno del cultivo de trigo en función de la disponibilidad de nitrógeno en el suelo, como se puede observar el dominio corresponde a partir de 100 *kg/ha* hasta 1000 *kg/ha*.

6.5.1.3.3 Cálculo de la tasa de crecimiento de una planta

La tasa de crecimiento de una planta se refiere a la velocidad con la que aumenta su tamaño, en términos de altura, diámetro o biomasa. Esta tasa puede variar dependiendo de la especie de la planta, las condiciones ambientales y los factores de manejo agronómico.

La tasa de crecimiento se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$Tasa\ de\ crecimiento = \frac{Tamaño\ final - Tamaño\ inicial}{Tiempo\ transcurrido}$$

Por ejemplo, si una planta tiene una altura inicial de 10 *cm* y después de 4 *semanas* su altura es de 20 *cm*, la tasa de crecimiento sería:

$$Tasa\ de\ crecimiento = \frac{(20 - 10)\ cm}{4\ semanas}$$

$$Tasa\ de\ crecimiento = 2.5\frac{cm}{semana}$$

Es importante tener en cuenta que la tasa de crecimiento de una planta no es constante durante todo su ciclo de vida y puede variar según el periodo de crecimiento y las condiciones ambientales. Por lo tanto, es recomendable medir la tasa de crecimiento en diferentes momentos del ciclo de vida para obtener una imagen más precisa de la tasa de crecimiento de la planta.

La tasa de crecimiento de una planta es una medida importante en la agronomía, ya que puede utilizarse para evaluar el rendimiento del cultivo, la eficiencia del manejo agronómico y la respuesta de la planta a diferentes condiciones ambientales y tratamientos (Hunt, 1982).

6.5.1.4 Modelado con funciones radicales

Las funciones radicales son importantes para el modelado matemático en la agricultura, ya que se utilizan para describir el crecimiento de las raíces de las plantas y su capacidad para absorber nutrientes y agua del suelo.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Tiene aplicaciones en la agricultura, por ejemplo, en el estudio de la relación entre el diámetro del tallo de una planta y su capacidad de transporte de nutrientes y agua. Un estudio de investigación realizado en plantas de pimiento (*Capsicum annuum* L.) examinó la relación entre el diámetro del tallo y la conductividad hidráulica específica (Ks), que es una medida de la capacidad de transporte de agua y nutrientes (Torgersen, 2002).

Los investigadores encontraron una relación no lineal entre el diámetro del tallo y Ks, lo que sugiere que la función radical sería apropiada para modelar esta relación. La relación se ajustó bien a una función radical, lo que permitió a los investigadores determinar el diámetro del tallo óptimo para lograr la máxima Ks en diferentes condiciones ambientales y de manejo (Ishida, 2012).

Otro ejemplo de aplicación es el modelo propuesto por (L. Li, 2020) para el crecimiento de las raíces de las plantas. En su estudio, los autores modificaron la función raíz cuadrada tradicional para adaptarla mejor a los datos experimentales, y demostraron que su modelo mejoraba significativamente la precisión de las predicciones de crecimiento de las raíces en comparación con otros modelos existentes.

6.5.1.4.1 Modelado de absorción de nutrientes de la raíz

En el modelo de absorción de nutrientes de la raíz, la tasa de absorción de nutrientes por la raíz es proporcional a la raíz cuadrada de la concentración de nutrientes en el suelo (F. García, 2014).

Esta relación se puede expresar matemáticamente como $F = k\sqrt{C}$

Donde:

F, tasa de absorción de nutrientes por la raíz

C, concentración de nutrientes en el suelo

k, constante de proporcionalidad que depende de las propiedades del suelo y del tipo de planta

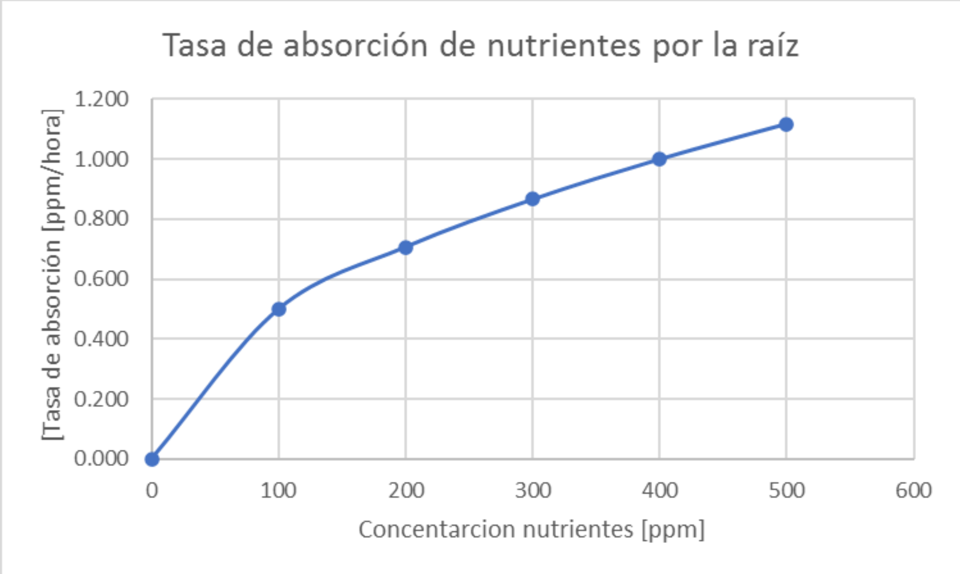
Considere k es igual a 0,05 y la concentración de nutrientes en el suelo es de 100 ppm, entonces la tasa de absorción de nutrientes por la raíz sería:

$$F = 0.05\sqrt{100}$$

$$F = 0.5\frac{ppm}{hora}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

La gráfica 85, muestra la tasa de absorción por la raíz con diferentes concentraciones de nutrientes en el suelo.



Gráfica 85. Tasa de absorción de nutrientes por la raíz

Este modelo de absorción de nutrientes de la raíz es importante en la agricultura, ya que permite optimizar la fertilización de los cultivos y maximizar la eficiencia de la absorción de nutrientes por las raíces.

6.5.1.4.2 Cálculo del volumen de tanque de almacenamiento de agua para riego

Un tanque tiene forma cilíndrica y una altura de 4 metros, pero la base es de forma cónica, con un radio de 2 metros en la parte superior y un radio de 1 metro en la parte inferior (K. Singh, 2014).

Entonces, el volumen del tanque se puede calcular como la suma del volumen del cilindro y el volumen del cono truncado:

$$V = V_{cilindro} + V_{cono}$$

El volumen del cilindro es:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$
$$V_{cilindro} = \pi 2^2(4)$$
$$V_{cilindro} = 16\pi$$

Para calcular el volumen del cono truncado, se puede usar la fórmula para el volumen de un cono:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Pero como el cono es truncado, se necesita restar el volumen del cono pequeño que se ha eliminado de la parte inferior. El radio del cono pequeño es 1 metro, y su altura se puede calcular usando el teorema de Pitágoras:

$$h_{cono\_pequeño} = \sqrt{4^2 - 1^2}$$

$$h_{cono\_pequeño} = \sqrt{15}$$

Entonces el volumen del cono truncado es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi 2^2\left(4 - \sqrt{15}\right) - \frac{1}{3}\pi 1^2(\sqrt{15})$$

$$V_{cono} = \frac{8}{3}\pi\left(4 - \sqrt{15}\right)$$

Por lo tanto, el volumen total del tanque es:

$$V = 16\pi + \frac{8}{3}\pi\left(4 - \sqrt{15}\right)$$

$$V = 5.19m^3$$

En este ejemplo, se utilizó una función radical (la raíz cuadrada en el cálculo de la altura del cono pequeño) para calcular el volumen del tanque de almacenamiento de agua para riego.

6.5.1.5 Modelado con funciones a trozos

La función a trozos, también conocida como función definida por partes, es una función matemática que se define en diferentes intervalos o segmentos en los que tiene un comportamiento específico. En la agricultura, este tipo de función se puede utilizar para modelar diferentes situaciones en las que hay cambios bruscos en las variables agronómicas (Maza, 2019).

Por ejemplo, en el diseño de un sistema de riego por goteo, se puede utilizar una función a trozos para modelar la tasa de aplicación de agua en diferentes etapas del cultivo, considerando factores como la evapotranspiración, la absorción de agua por parte de las raíces y la capacidad de retención de agua del suelo (Meza, 2019).

Otro ejemplo de aplicación de funciones a trozos en agricultura es en el modelado del crecimiento de plantas en diferentes etapas fenológicas, donde se pueden considerar diferentes tasas de crecimiento en función de factores como la disponibilidad de nutrientes y la intensidad lumínica (Maiti, 2018).

ISBN: 978-987-82912-7-7

6.5.1.5.1 Pago transporte por grupos

La extensión rural se encarga de brindar asesoramiento técnico y capacitación a los agricultores y ganaderos para que puedan adoptar las prácticas más adecuadas en cuanto a técnicas agrícolas, manejo de suelos, uso de fertilizantes, selección de semillas, control de plagas y enfermedades, entre otros aspectos, también se enfoca en promover la adopción de tecnologías agrícolas y fomentar el desarrollo de nuevas prácticas y tecnologías que puedan mejorar la producción agrícola. Esto es fundamental para aumentar la producción de alimentos y mejorar la seguridad alimentaria en una población cada vez más grande. además, brinda información sobre políticas públicas y programas de incentivos que puedan beneficiar a los agricultores y ganaderos en términos económicos, sociales y ambientales.

A continuación, se presentan ejemplos para modelar con funciones a trozos.

Para una capacitación de extensionismo rural se requiere movilizar grupos de personas, por lo que se contrata una compañía de autobuses, esta tiene la siguiente política de precios para los grupos que deseen alquilar autobuses. A los grupos que contengan un máximo de 40 personas se les cobrará una suma fija de \$ 2400 (40 veces \$ 60). En grupos que contengan entre 40 y 80 personas, cada una pagará \$ 60 menos 50 centavos por cada persona que pase de las 40. La tarifa más baja de la compañía de \$ 40 por persona se ofrecerá a grupos que contengan 80 miembros o más. Exprese los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.

Entonces:

n, número de personas a movilizar, variable independiente
$c(n)$, valor a pagar en función del número de personas
Para la construcción del modelo que describe el comportamiento del fenómeno en estudio, se realiza el razonamiento, según las indicaciones de la propuesta del valor a pagar de la empresa de servicio de transporte, entonces:

Si el grupo es de hasta 40 personas, es decir $0 < n \leq 40$, se debe pagar 2400 dólares

Si el grupo tiene más 40 personas, pero menos de 80, es decir $40 < n \leq 80$, en primera instancia debo saber cuántas personas exceden de 40, entonces $n - 40$, por cada persona que excede a 40 realiza un descuento de 50 centavos a los 60 dólares fijos que pagaba cuanto el grupo era de hasta 40 personas, entonces: $60 - 0.5(n - 40)$, este valor

ISBN: 978-987-82912-7-7

representa lo que va a pagar cada persona, por loque a este valor se debe multiplicar por el número de personas del grupo, queda de la siguiente manera: $n(60-0.5(n-40))$

Y por último menciona que, si el grupo supera las 80 personas, entonces cada persona paga 40 dólares, por lo que queda de la siguiente manera: $40n$

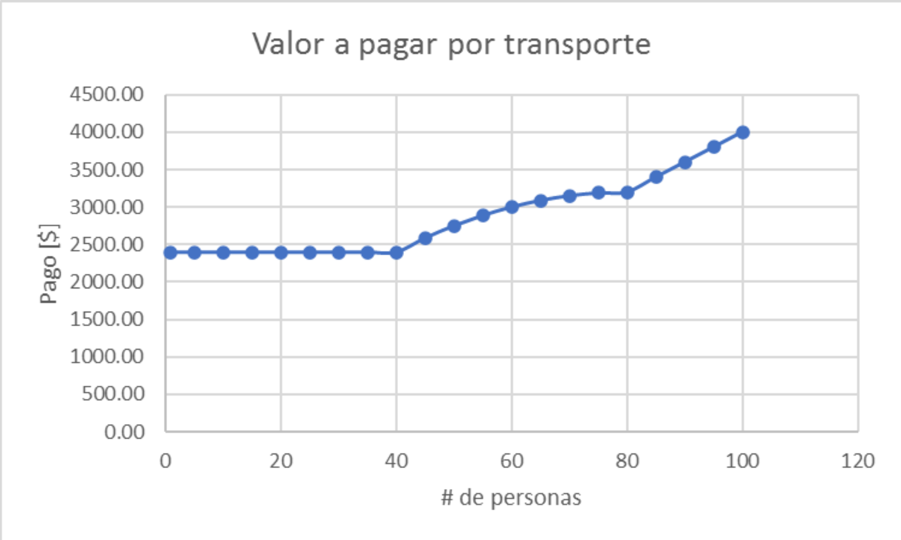
Por lo que el modelo resultante es:

$$c(n) = \begin{cases} 2400, si\ 0 < n \leq 40 \\ n(60-0.5(n-40)), si\ 40 < n \leq 80 \\ 40n\ , si\ n > 80 \end{cases}$$

La Grafica 86, presenta la gráfica de la función a trozos.

Valores

n	c [$]
1	2400.00
5	2400.00
10	2400.00
15	2400.00
20	2400.00
25	2400.00
30	2400.00
35	2400.00
40	2400.00
45	2587.50
50	2750.00
55	2887.50
60	3000.00
65	3087.50
70	3150.00
75	3187.50
80	3200.00
85	3400.00
90	3600.00
95	3800.00
100	4000.00



Gráfica 86. Pago por transporte según número de personas

6.5.1.5.2 Crecimiento de plantas en función del agua recibida

Se requiere analizar el crecimiento de una planta en función de la cantidad de agua recibida, se sabe que el crecimiento de la planta es lineal hasta un cierto punto, después del cual se estanca y no crece más, debido a un exceso de agua. Se observa que la planta crece 2 mm por día para una cantidad de agua menor o igual a 500 ml y que para una cantidad de agua mayor a 500 ml, la planta no crece más, se mantiene en un tamaño de 10 cm (Sripada, 2018).

Entonces:

x, cantidad de agua, variable independiente

$f(x)$, crecimiento de la planta en función de la cantidad de agua recibida

Para la construcción del modelo que describe el comportamiento del fenómeno en estudio, se realiza el razonamiento, según lo descrito en el problema, entonces:

Si la planta recibe una cantidad de agua de hasta 500 ml, es decir $0 \leq x \leq 500$, la planta crece proporcionalmente a la cantidad de agua recibidas, es decir tienen un comportamiento lineal $f(x) = 0.02x$.

Y por último menciona que, si la cantidad de agua suministrada a la planta supera a 500 ml, esta debido al estrés hídrico esta deja de crecer y se mantiene en 10 cm y es posible se produzca la muerte de la planta, de aquí la función es la siguiente: $f(x) = 10$.

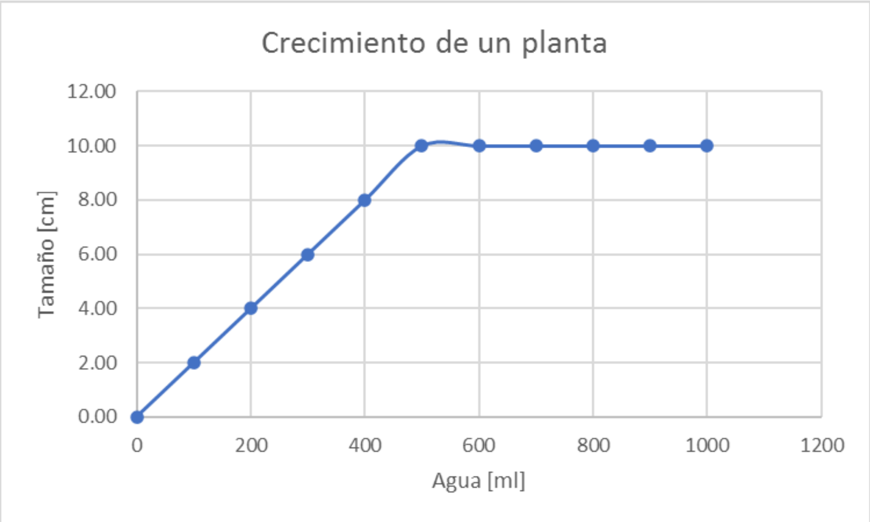
Por lo que el modelo resultante es:

$$f(x) = \begin{cases} 0.02x, & si\ 0 \leq x \leq 500 \\ 10, & si\ x > 500 \end{cases}$$

La Grafica 87, presenta la gráfica de la función a trozos.

Valores

x	*f [cm]*
0	0.00
100	2.00
200	4.00
300	6.00
400	8.00
500	10.00
600	10.00
700	10.00
800	10.00
900	10.00
1000	10.00



Gráfica 87. Crecimiento de una planta según cantidad de agua

ISBN: 978-987-82912-7-7

6.5.1.5.3 Cinética de crecimiento de una planta

El modelo de cinética de crecimiento de una planta se ha utilizado en numerosos estudios de biología vegetal, como una herramienta para estudiar el crecimiento y el desarrollo de las plantas en diferentes condiciones ambientales y bajo diferentes tratamientos. Además, se ha utilizado en la modelización de sistemas agrícolas y en la optimización de la producción de cultivos (Marty, 2019).

Este modelo describe el crecimiento de las plantas a lo largo del tiempo, mediante la representación de una curva sigmoidea que se compone de tres fases distintas: la fase exponencial, la fase lineal y la fase de senescencia. En la fase exponencial, la tasa de crecimiento de la planta es alta, y el crecimiento se acelera a medida que la planta se desarrolla. En la fase lineal, la tasa de crecimiento comienza a disminuir a medida que la planta se acerca a su tamaño máximo. Finalmente, en la fase de senescencia, la tasa de crecimiento disminuye aún más, hasta que la planta llega a su tamaño máximo y comienza a declinar (H. Liu, 2016).

Para ilustrar el modelo de cinética de crecimiento de una planta con curva sigmoidea, se considera Peso seco de una planta de trigo con los siguientes parámetros experimentales:

La fase exponencial, se encuentra definido en el intervalo de tiempo [0,30] días, se puede representar con la ecuación:

$$y(x) = 0.1957e^{0.0946x}$$

Donde:

0.1957, peso inicial de la planta [g]

0.0946, tasa de crecimiento en la fase exponencial

La fase lineal, se encuentra definida en el intervalo de tiempo (30, 50] días, se puede representar con la ecuación:

$$y(x) = 0.296x - 5.56$$

Donde:

0.296, pendiente de la fase lineal

5.56, intercepto de la fase lineal

ISBN: 978-987-82912-7-7

La fase de senescencia, la curva está definida para tiempos superiores a 50 días, se puede representar con la ecuación:

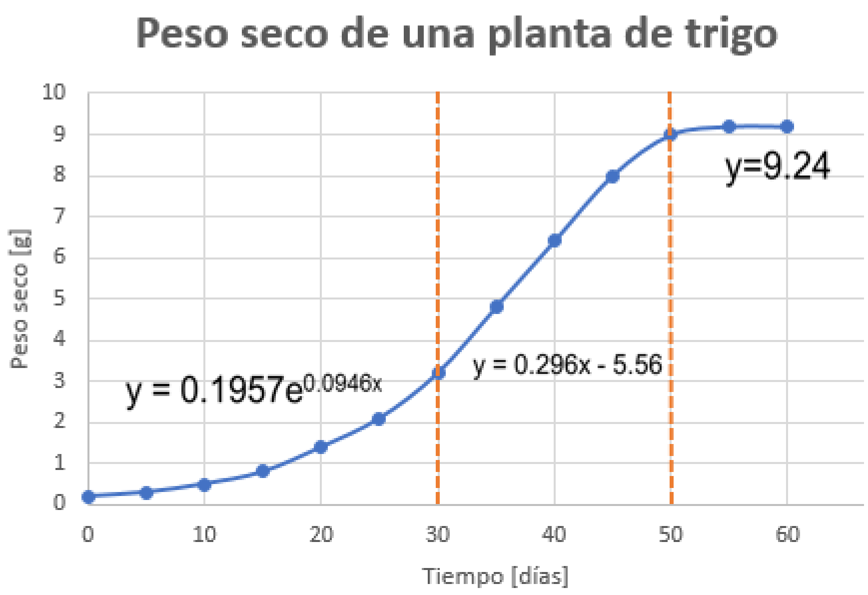
$$y(x) = 9.24$$

Como se puede observar el límite inferior de crecimiento en la fase de senescencia es 9.24 g.

La Gráfica 88, muestra la curva sigmoidea de crecimiento de la planta en sus tres fases:

Valores

Tiempo [días]	Peso Seco [g]
0	0.196
5	0.313
10	0.501
15	0.802
20	1.283
25	2.052
30	3.320
35	4.800
40	6.280
45	7.760
50	9.240
55	9.240
60	9.240



Gráfica 88. Peso seco del trigo

Este modelo permite predecir el crecimiento de las plantas en diferentes condiciones ambientales y puede ser utilizado para optimizar la producción agrícola.

6.6 MODELADO CON FUNCIONES TRASCENDENTES

En la agronomía, los modelos con funciones trascendentes se utilizan para describir fenómenos más complejos y no lineales que no pueden ser modelados por funciones polinómicas. Estas funciones incluyen las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, y otras funciones que permiten describir la relación entre variables de forma no lineal.

Con estas funciones se poder desarrollar modelos aplicables a la agronomía para predecir y entender la relación entre variables biológicas y físicas que afectan el crecimiento y rendimiento de las plantas. Estos modelos pueden ser útiles para el diseño y manejo de

ISBN: 978-987-82912-7-7

cultivos, y para comprender la dinámica de los sistemas agrícolas complejos (Amthor, 2000).

Un ejemplo de modelo con función trascendente es el modelo de crecimiento logístico, que se utiliza para modelar el crecimiento de poblaciones de plantas. El modelo de crecimiento logístico utiliza una función logística, que describe el crecimiento de una población como una curva S, que inicialmente aumenta exponencialmente, pero luego se estabiliza a medida que la población alcanza su capacidad de carga. Este modelo puede ser útil para entender la dinámica de las poblaciones de plantas, y para predecir el crecimiento y rendimiento de los cultivos.

Otro ejemplo es el modelo de respiración de las plantas, que se utiliza para entender cómo las plantas respiran y utilizan el oxígeno. El modelo utiliza la función de Michaelis-Menten, que describe cómo la tasa de respiración de las plantas aumenta inicialmente a medida que la concentración de oxígeno aumenta, pero luego se estabiliza a medida que la concentración de oxígeno alcanza un nivel máximo (Hinsinger, 2003).

En general, los modelos con funciones trascendentes son una herramienta valiosa en la agronomía para comprender y predecir la dinámica de los sistemas agrícolas, y para tomar decisiones informadas sobre el manejo de los cultivos.

Como ya se mencionó anteriormente las funciones trascendentes son aquellas que no son polinómicas y son muy utilizadas en la agronomía para modelar fenómenos biológicos o físicos más complejos. Algunos ejemplos de modelos con funciones trascendentes en la agronomía se describen a continuación:

Modelo de crecimiento logístico: Este modelo utiliza una función logística para predecir el crecimiento de una población de plantas en función del tiempo (Verhulst, 2018). Su ecuación matemática se presenta como sigue:

$$N(t) = 1 + \frac{k}{1 + ae^{rt}}$$

Donde:

t, tiempo, variable independiente.

$N(t)$, tamaño de la población en el tiempo t.

ISBN: 978-987-82912-7-7

k, capacidad de carga de la población.

a, constante que representa la tasa de crecimiento.

r, tasa de mortalidad.

6.6.1 Modelado con funciones exponenciales

La función exponencial es ampliamente utilizada en la agricultura para modelar el crecimiento y la dinámica de las poblaciones de plantas y microorganismos, así como la degradación de sustancias químicas en el suelo y en el agua. Algunos ejemplos específicos de su aplicación son:

Modelado del crecimiento de las plantas en función del tiempo, la temperatura, la humedad del suelo y otros factores ambientales. Esto puede ayudar a los agricultores a predecir el rendimiento de los cultivos y optimizar las prácticas agrícolas para maximizar el crecimiento y la productividad.

La función exponencial también tiene aplicaciones en la agricultura, especialmente en la modelización de procesos de crecimiento y desarrollo de las plantas. Se puede utilizar para describir el crecimiento de la población de una plaga en un cultivo. En este caso, la función exponencial se ajusta bien a los datos, ya que la población de la plaga crece de manera exponencial en ausencia de controles efectivos. Una vez que se aplica un control, la población de la plaga puede disminuir a una tasa exponencial (I. López, 2016).

Modelado de la degradación de sustancias químicas, como pesticidas y herbicidas, en el suelo y en el agua. Esto puede ayudar a los agricultores a determinar cuánto tiempo tardarán estos productos en descomponerse y cuál es la cantidad segura para usar en un área determinada. También se puede utilizar para modelar la tasa de descomposición de los residuos de cultivos y otros materiales orgánicos en el suelo. La tasa de descomposición suele disminuir con el tiempo, pero en algunos casos puede seguir una curva exponencial (Zhang, 2020).

Modelado de la dinámica de poblaciones de microorganismos, como bacterias y hongos, en el suelo y en la planta. Esto puede ayudar a los agricultores a predecir la incidencia de enfermedades y plagas y tomar medidas preventivas antes de que se produzcan brotes graves (Y. Liu, 2015).

ISBN: 978-987-82912-7-7

Un ejemplo de estudio que utiliza la función exponencial en la agricultura es "Modelado de la dinámica de población de plagas de ácaros en cultivos de fresa usando modelos exponenciales" de Zeng, 2018. En este estudio, los autores utilizaron un modelo exponencial para describir la dinámica de población de ácaros en cultivos de fresa. La función exponencial permitió a los autores predecir la tasa de crecimiento de la población de ácaros en función del tiempo y, por lo tanto, diseñar estrategias efectivas de control de plagas.

6.6.1.1 Crecimiento vegetal

El crecimiento vegetal es un proceso dinámico que se caracteriza por un aumento en la biomasa y en la altura de la planta a medida que ésta se desarrolla. El crecimiento de las plantas está influenciado por una serie de factores, como la disponibilidad de agua, nutrientes, luz, temperatura, y la presencia de plagas y enfermedades. Las funciones exponenciales son herramientas matemáticas útiles para modelar el crecimiento vegetal, ya que describen el aumento de una cantidad en relación con su tasa de crecimiento constante (Bolker, 2008). El modelo de crecimiento se puede expresar mediante la función exponencial en la forma general:

$$y = ae^{(kx)}$$

Donde:

y, tamaño de la planta en un momento dado
x, tiempo transcurrido desde el inicio de la observación
a, tamaño inicial de la planta
k, tasa de crecimiento de la planta

Para aplicar esta función al crecimiento vegetal, se puede tomar el tamaño de la planta como la variable dependiente (y) y el tiempo como la variable independiente (x). A medida que la planta crece, el valor de y aumenta de manera exponencial a una tasa constante k.

El uso de funciones exponenciales para modelar el crecimiento vegetal se ha aplicado en diferentes estudios en los que se ha analizado el crecimiento de diferentes tipos de plantas, como maíz, tomate, pimiento, entre otros. Por ejemplo, en un estudio de crecimiento de plantas de tomate, se utilizó una función exponencial para modelar el crecimiento del tallo de la planta, y se encontró que la tasa de crecimiento era significativamente mayor durante las primeras etapas de crecimiento de la planta, mientras que disminuía a medida que la planta se desarrollaba (Djebali, 2015).

ISBN: 978-987-82912-7-7

A continuación, se presentan un ejemplo de la aplicación del modelo de crecimiento de plantas con una función exponencial.

Se requiere modelar el crecimiento de un cultivo de maíz durante los primeros 60 días de la temporada de crecimiento. Se sabe que la tasa de crecimiento del maíz es del 5% por día y la tasa de muerte de las plantas es del 2% por día. El tamaño inicial de la plántula de maíz cuando se empezó a tomar datos es de 10 cm.

Datos:
Tiempo: 60 días
Tasa de crecimiento del maíz es del 5% por día
Tasa de muerte de las plantas es del 2% por día.
Tamaño inicial de la planta 10 cm.
Para hacer esto, podemos se utiliza la función exponencial:

$$y = ae^{(kx)}$$

Es importante indicar que k, la tasa de crecimiento netas se calcula de la siguiente manera:

$$k = tasa\ de\ crecimiento\ -\ tasa\ de\ muerte$$

$$k = 5\% - 2\%$$

$$k = 3\%$$

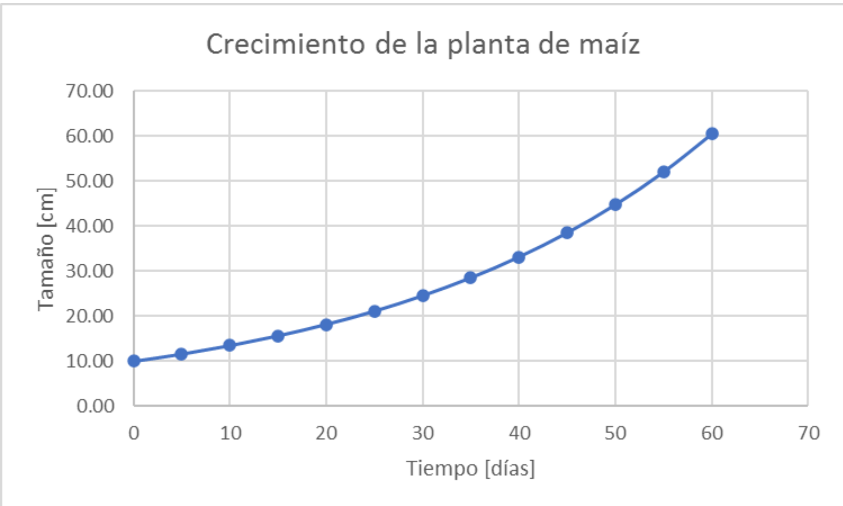
Entonces, la tasa de crecimiento neta es $k = 0.03$.

Por lo tanto, la ecuación que describe el crecimiento de la planta es:

$$y(x) = 10e^{(0.03x)}$$

Valores

x [días]	y[cm]
0	10.00
5	11.62
10	13.50
15	15.68
20	18.22
25	21.17
30	24.60
35	28.58
40	33.20
45	38.57
50	44.82
55	52.07
60	60.50



Gráfica 89. Crecimiento del maíz

ISBN: 978-987-82912-7-7

Podemos usar esta tasa de crecimiento neta para calcular el tamaño después de los 60 días:

$$y = 10e^{(0.03*60)} = 60.50\ cm$$

Como se puede observar en la Gráfica 89, el modelo del crecimiento de la planta tiene un crecimiento exponencial creciente a partir de los 10 *cm* que se tomó como dato del tamaño inicial de la planta, por lo tanto, podemos predecir que medir aproximadamente 60.50 *cm* plantas después de los 60 días.

6.6.1.2 Distribución de semillas

La distribución de semillas es un proceso importante en la siembra de cultivos y puede ser modelado con funciones exponenciales. La distribución de semillas se refiere a cómo se colocan las semillas en la parcela y puede influir en el crecimiento y rendimiento de los cultivos. Una distribución uniforme de las semillas es deseable para lograr un crecimiento uniforme y maximizar el rendimiento.

Una función exponencial se puede utilizar para modelar la distribución de semillas en una parcela. La función exponencial de densidad de probabilidad (PDF) se puede utilizar para modelar la densidad de semillas en una parcela. La distribución exponencial también se puede utilizar para modelar la distribución de espacios entre las semillas. Si se desea obtener una distribución uniforme, se puede utilizar una función exponencial inversa (CDF), que distribuye uniformemente las semillas en el espacio.

Un ejemplo de aplicación de una función exponencial para la distribución de semillas es en la siembra de cultivos de maíz, en el estudio se utilizaron funciones exponenciales para modelar la distribución de semillas en diferentes áreas de la parcela. Los resultados mostraron que la distribución exponencial inversa permitió una distribución uniforme de las semillas en el espacio, lo que mejoró el crecimiento y rendimiento de los cultivos (Rui, 2014).

A continuación, se presenta un ejemplo de la aplicación de un modelo con función exponencial para la distribución de semilla en una parcela:

Se desea sembrar un campo rectangular de 50 metros de largo y 30 metros de ancho con semillas de trigo. Se tiene que obtener una densidad de plantas uniforme de 250 plantas por metro cuadrado.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Datos:

Cultivo: trigo

Largo: 50 metros

Ancho: 30 metros

Densidad de plantas uniforme de 250 $\frac{plantas}{m^2}$.

Para calcular la cantidad de semillas que se deben sembrar por unidad de área, podemos utilizar la función exponencial:

$$D(x,y) = ke^{-\lambda\ ((x-a)^2\ +\ (y-b)^2)}$$

Donde:

$D(x,y)$, densidad de semillas en el punto (x,y)
k, densidad de semillas en el centro del campo
λ, constante que controla la rapidez con que disminuye la densidad de semillas desde el centro del campo
(a,b), coordenadas del centro del campo (25,15)

En este caso, podemos definir (a,b) como el centro del campo, que se encuentra en las coordenadas *(25, 15)*. También sabemos que la densidad de plantas uniforme que queremos es de *250* $\frac{plantas}{m^2}$, lo que equivale a *0.025* $\frac{plantas}{cm^2}$.. Entonces podemos usar esto para calcular k:

$$k = \frac{0{,}025}{e^{-\lambda((x-25)^2+(y-15)^2)}}$$

Entonces podemos calcular la densidad de semillas en cualquier punto *(x,y)* del campo. Por ejemplo, para encontrar la cantidad de semillas que se deben sembrar en el punto (10, 20), podemos calcular *D(10,20):*

$$D(10{,}20) = ke^{-\lambda((10-25)^2+(20-15)^2)}$$

$$D(10{,}20) = 0{,}0127$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Por lo tanto, para obtener una densidad de plantas uniforme de 250 plantas por metro cuadrado en un campo de 50 metros de largo y 30 metros de ancho, debemos sembrar aproximadamente 378750 semillas.

6.6.1.3 Uso de plaguicidas

El uso de plaguicidas en la agricultura es importante para proteger las plantas y aumentar su productividad. Sin embargo, el uso excesivo o inadecuado de estos puede tener efectos negativos en el ambiente y en la salud humana. Por lo tanto, es necesario desarrollar modelos para optimizar el uso de plaguicidas.

Una forma de modelar el uso de plaguicidas en plantas es a través de ecuaciones exponenciales. Estas ecuaciones describen la relación entre la cantidad de plaguicida aplicado y su eficacia en el control de plagas.

A continuación, se presenta un ejemplo de ecuación exponencial para modelar la degradación de plaguicidas en el suelo:

La ecuación de degradación exponencial para plaguicidas en el suelo se define como:

$$C(t) = C_0 e^{(-kt)}$$

Donde:

$C(t)$, concentración del plaguicida en el suelo en el tiempo t.

C_0, concentración inicial del plaguicida.

k, tasa de degradación del plaguicida en el suelo.

Podemos utilizar esta ecuación para determinar la concentración de plaguicida en el suelo después de un tiempo determinado y ajustar la tasa de degradación k para maximizar la eficacia del plaguicida y minimizar la exposición ambiental.

A continuación, se desarrolla un ejemplo del modelo de la degradación del plaguicida con la aplicación de ecuaciones exponenciales:

La concentración inicial del plaguicida en el suelo es de 100 ppm (partes por millón) y que la tasa de degradación k es de 0.1 día^{-1}. Se requiere calcular la concentración del plaguicida en el suelo después de 10 días (Casida, 2004).

ISBN: 978-987-82912-7-7

Para calcular la cantidad de plaguicida en el suelo se debe aplicar, podemos utilizar la función exponencial:

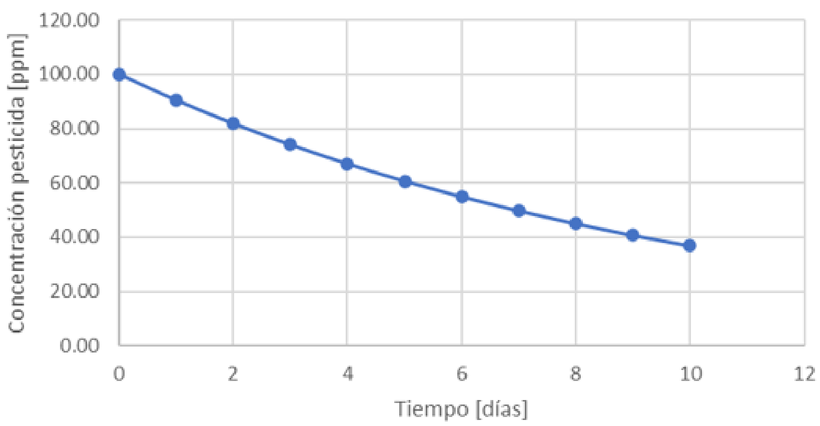
$C(t) = C_0 e^{-kt}$

$$C(t) = 100e^{-0.1t}$$

Esta ecuación, es el modelo que describe el comportamiento del plaguicida en el suelo, a partir de eta se realiza la tabla de valores y la gráfica para realizar un análisis visual.

Valores

Tiempo [días]	Concentración plaguicida [ppm]
0	100.00
1	90.48
2	81.87
3	74.08
4	67.03
5	60.65
6	54.88
7	49.66
8	44.93
9	40.66
10	36.79



Gráfica 90. Concentración del plaguicida en el suelo

Como se puede observar en la gráfica 90, mientras transcurre el tiempo la cantidad de plaguicida en el suelo va disminuyendo de forma exponencial decreciente y en aproximadamente 10 días se tiene un aproximado de 39 ppm, pero se va a realizar los cálculos matemáticos para obtener un valor exacto.

Entonces para $t = 10$, se tiene:

$C(10) = 100e^{-0.1*10}$

$$C(10) = 36.79\ ppm$$

Esto significa que después de 10 días, la concentración del plaguicida en el suelo se ha reducido a 36.79 ppm debido a la degradación.

ISBN: 978-987-82912-7-7

6.6.2 Modelado con funciones logarítmicas

La función logarítmica es ampliamente utilizada en la agricultura para modelar el crecimiento y la respuesta de las plantas a diferentes factores ambientales y prácticas agronómicas. algunos ejemplos de su uso son:

Para modelar el crecimiento de las plantas a lo largo del tiempo, esta función toma la forma de una curva en forma de S y se utiliza para describir el crecimiento de la biomasa, el número de hojas, el área foliar y otros parámetros de crecimiento de las plantas en respuesta a diferentes tratamientos.

Para modelar la absorción de nutrientes por parte de las plantas, la tasa de absorción de nutrientes por parte de las raíces de las plantas suele disminuir a medida que aumenta la concentración del nutriente en el suelo, y la función logarítmica puede utilizarse para describir esta relación.

Para evaluar la calidad del suelo y la disponibilidad de nutrientes, la actividad biológica del suelo, que influye en la disponibilidad de nutrientes para las plantas, a menudo se describe mediante una función logarítmica en función de la temperatura y la humedad del suelo (Anderson, 2015).

6.6.2.1 Modelación de crecimiento vegetal

El modelado del crecimiento vegetal con logaritmos es un enfoque común para describir la relación entre la tasa de crecimiento de una planta y su tamaño o edad. Uno de los modelos más conocidos es el modelo de crecimiento de Richards, que utiliza una función logística para describir el crecimiento de la planta (Richards, 1959).

La ecuación del modelo de Richards se puede expresar de la siguiente manera:

$$\ln(y) = \ln(a) + b * ln(x)$$

Donde:

y, es el tamaño de la planta en un momento dado

x, variable independiente, es la edad de la planta en ese momento

a y b, son constantes que determinan la tasa de crecimiento de la planta

Para ajustar los parámetros del modelo de Richards, se puede utilizar un análisis de regresión no lineal de los datos de tamaño y edad de la planta.

ISBN: 978-987-82912-7-7

A continuación, se presenta un ejemplo de cómo se puede aplicar el modelo de Richards para modelar el crecimiento de una planta de maíz en diferentes edades

Adicional eso se conoce que $a = 0.9716$ y $b = 0.5391$, se desea modelar el crecimiento de la planta utilizando el modelo de Richards. La cual queda de la siguiente manera:

$$\ln(Tamaño) = \ln(0.9716\,) + 0.539 * ln(Edad)$$

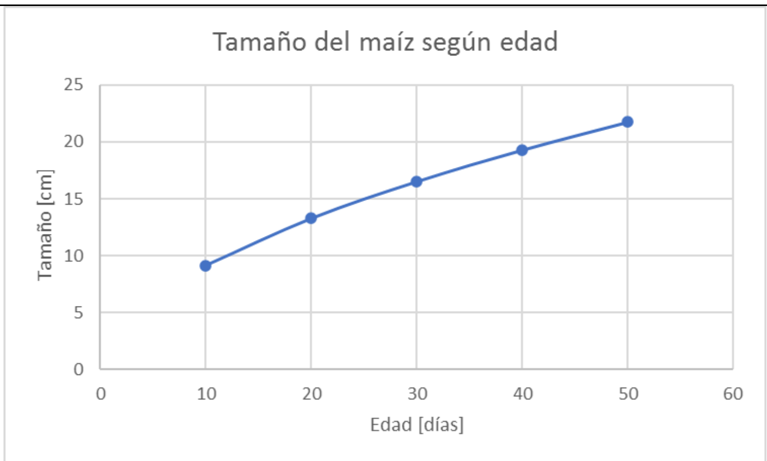
Aplicando el modelo se puede se pueden calcular los valores de tamaño predichos para diferentes edades utilizando la ecuación del modelo de Richards:

$$Tamaño = e^{0.9716} * Edad^{0.539}$$

Para graficar se calcula la tabla de valores y se dibuja la curva de crecimiento predicha por el modelo de Richards junto con los datos observados:

Valores

Edad [días]	Tamaño del maíz[cm]
10	9.140
20	13.281
30	16.525
40	19.296
50	21.762



Gráfica 91. Tamaño del maíz

Como se puede observar en la gráfica 91, mientras aumenta la edad, también se incrementa el tamaño de la planta, pero normalmente, los maíces de altura tienen un ciclo de cultivo de **215 a 270 días** desde la siembra hasta la cosecha, por lo que el dominio no puede ser mayor a este.

6.6.2.2 Análisis de pH

El cálculo del pH del suelo es una medida importante para determinar la acidez o alcalinidad del suelo, lo cual es esencial para el crecimiento de las plantas y la fertilidad

ISBN: 978-987-82912-7-7

del suelo, se puede medir utilizando un medidor de pH o mediante el uso de indicadores de pH, pero también se puede calcular a partir de la concentración de iones de hidrógeno (H+) en el suelo.

La escala del pH es logarítmica con valores de 0 a 14. Un incremento de una unidad en la escala logarítmica equivale a una disminución diez veces mayor en la concentración de iones de hidrógeno.

La ecuación para calcular el pH del suelo a partir de la concentración de iones de hidrógeno es la siguiente:

$$\mathrm{pH} = -\log(H+)$$

Donde:

$[H+]$, variable independiente, es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro (en $\frac{mol}{l}$). Una concentración más alta de iones H+ en el suelo significa que el suelo es más ácido, mientras que una concentración más baja de iones H+ indica un suelo más alcalino.

Es importante tener en cuenta que el pH del suelo también puede verse afectado por la presencia de otros iones, como iones de aluminio, calcio, magnesio y sodio, así como por el contenido de materia orgánica en el suelo. Por lo tanto, es importante tener en cuenta estos factores al evaluar el pH del suelo (Brady, 2016).

A continuación, se presenta un ejemplo de la aplicación del modelo indicado para el cálculo del pH del suelo en un campo de cultivo donde se han tomado varias muestras en diferentes ubicaciones. Se sabe que el pH varía de 4 a 8 en estas muestras.
Para analizar los datos, se puede utilizar la función logarítmica:

$$\mathrm{pH} = -\log(H+)$$

Para encontrar la concentración de iones hidrógeno en cada muestra, se puede aplicar la función inversa de la función logarítmica:

$$\mathrm{H}+= 10^{-pH}$$

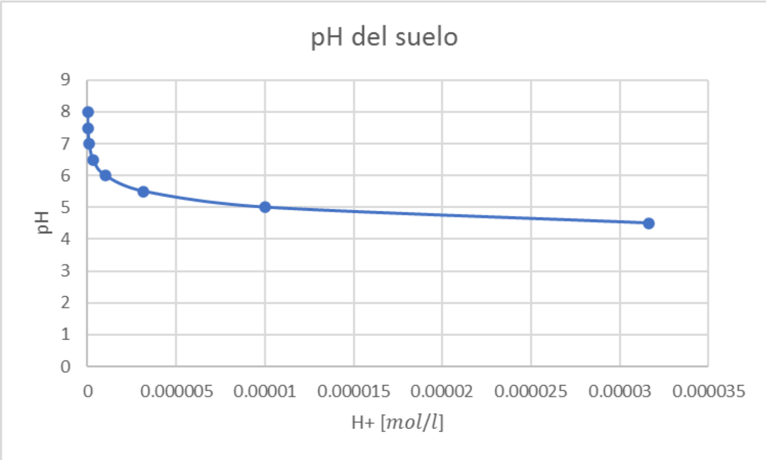
Por lo tanto, si se sabe el pH en cada muestra, se puede calcular la concentración de iones hidrógeno correspondiente.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Para calcular se tiene los siguientes datos de las muestras:

Valores

N.	H+	pH
1	3.16228E-05	4.5
2	0.00001	5.0
3	3.16228E-06	5.5
4	0.000001	6.0
5	3.16228E-07	6.5
6	0.0000001	7.0
7	3.16228E-08	7.5
8	0.00000001	8.0



Gráfica 92. pH de las muestras

Para encontrar la concentración de iones hidrógeno en cada muestra, se puede aplicar la función inversa de la función logarítmica:

$$H+= 10^{-pH}$$

Por ejemplo, para la muestra 1, se tiene:

$H+= 10^{-pH}$

$H+= 10^{-4,5}$

$$H+= 3,16x10^{-5}mol/l$$

De esta forma se pueden calcular las concentraciones de iones hidrógeno correspondientes a cada muestra (Gráfica 92). Estos datos pueden ser útiles para los ingenieros agrónomos para determinar la fertilidad del suelo y diseñar estrategias de fertilización adecuadas para el cultivo.

6.6.2.3 Cálculo de la tasa de infiltración del agua

La tasa de infiltración de agua se refiere a la velocidad a la cual el agua penetra en el suelo a través de su superficie, se puede medir en términos de la cantidad de agua que penetra en el suelo por unidad de tiempo, generalmente en milímetros por hora (mm/h) o en pulgadas por hora (in/h).

La tasa de infiltración de agua está influenciada por muchos factores, como la textura del suelo, la compactación, la presencia de vegetación, la cantidad de agua que ya está

ISBN: 978-987-82912-7-7

presente en el suelo y la pendiente del terreno. También puede variar con el clima y las condiciones meteorológicas, como la lluvia o la humedad relativa del aire.

Es importante medir la tasa de infiltración de agua para comprender cómo el agua se mueve a través del suelo y cómo puede afectar a los ecosistemas y las comunidades humanas que dependen del agua. Por ejemplo, una tasa de infiltración baja puede resultar en una acumulación de agua en la superficie del suelo, lo que puede provocar inundaciones, mientras que una tasa de infiltración alta puede resultar en una rápida filtración del agua en el suelo, lo que puede reducir la disponibilidad de agua superficial para las plantas y la vida silvestre (USDA, 2004).

Es posible utilizar logaritmos para el cálculo de la tasa de infiltración de agua en algunos casos. Uno de los métodos que se basa en el uso de logaritmos para calcular la tasa de infiltración de agua es el método de Philip-Dunne, este utiliza una relación empírica entre la tasa de infiltración y la cantidad de agua que se ha infiltrado en un tiempo determinado. La relación se puede expresar en forma de una ecuación logarítmica, que se puede resolver para obtener la tasa de infiltración (Philip, 1957).

El método de Philip-Dunne es adecuado para suelos con una tasa de infiltración moderada a alta y con una textura uniforme. Sin embargo, también tiene algunas limitaciones y no es adecuado para suelos con alta variabilidad en la textura o en la capacidad de infiltración.

El cálculo de la tasa de infiltración utilizando el método de Philip-Dunne implica el uso de una ecuación logarítmica que relaciona la tasa de infiltración con la cantidad de agua que se ha infiltrado en un tiempo determinado. El modelo que describe este comportamiento se puede expresar en la siguiente ecuación:

$$f = \frac{1}{a} ln\,(\frac{aS + 1}{S + 1})$$

Donde:

f, tasa de infiltración (en $\frac{mm}{h}$)

a, constante empírica que depende de la textura del suelo y se puede encontrar en tablas de referencia

ISBN: 978-987-82912-7-7

S, relación entre la cantidad de agua que se ha infiltrado en un tiempo determinado y el tiempo transcurrido (en $\frac{mm}{h}$), variable independiente.

Para calcular la tasa de infiltración utilizando esta ecuación, se debe medir la cantidad de agua que se ha infiltrado en un tiempo determinado y la relación *S*, y encontrar la constante empírica a en una tabla de referencia para la textura del suelo.

A continuación, presenta un ejemplo para calcular la tasa de infiltración utilizando el método de Philip-Dunne: se midió que en un área de 1 m^2 se infiltró un volumen de agua de 40 mm en 30 min. El suelo tiene una textura franca, por lo que la constante empírica a es *0.007* (Dunne, 1978) . ¿Cuál es la tasa de infiltración de agua utilizando el método de Philip-Dunne?

Datos:

Cantidad de agua infiltrada: 40 mm

Tiempo de infiltración: *30* minutos = *0.5* horas

Relación $S = \frac{40\ mm}{0.5\ h} = 80\frac{mm}{h}$

Constante empírica $a = 0.007$ (para suelo franco)

Con los datos indicados se puede realizar el cálculo de la tasa de infiltración, la cual queda de la siguiente manera:

$$f = \frac{1}{0.007} ln\left(\frac{0.007 * 80 + 1}{80 + 1}\right)$$

$$f = 52.4\frac{mm}{h}$$

Por lo tanto, la tasa de infiltración de agua utilizando el método de Philip-Dunne es de $52.4\frac{mm}{h}$.

6.6.3 Modelado con funciones trigonométricas

La trigonometría tiene varios usos en la agricultura, incluyendo el cálculo de distancias, ángulos, áreas, medidas de terrenos, la altura de árboles, el ángulo de inclinación del terreno, la distancia entre árboles y otros objetos agrícolas. Es útil para:

ISBN: 978-987-82912-7-7

Calcular la distancia entre dos puntos en un terreno agrícola, frecuentemente usado en la planificación de la siembra y la colocación de sistemas de riego, si se desea saber la distancia entre dos puntos A y B en un terreno, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo formado por los puntos A y B y un punto C ubicado en línea recta con A y B.

Calcular los ángulos de inclinación de las pendientes en un terreno, esto es importante para la planificación de la siembra y la irrigación, ya que las pendientes pronunciadas pueden afectar la distribución del agua y los nutrientes, se puede utilizar la función trigonométrica del seno para calcular el ángulo de inclinación de una pendiente, conocidos la altura y la longitud.

También para calcular la altura de un árbol, con el método "método del ángulo de inclinación", que consiste en medir la distancia entre el árbol y una marca en el suelo, y luego medir el ángulo que se forma desde la marca hasta la parte superior del árbol. A partir de estas medidas, se puede utilizar trigonometría para calcular la altura del árbol.

Calcular las áreas de los terrenos agrícolas, la aplicación de la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados, o la fórmula del área de un polígono regular para calcular el área de un terreno con forma regular.

Determinar la ubicación de los cultivos en un terreno agrícola, mediante la triangulación para determinar la ubicación exacta de un cultivo en relación con otros cultivos o características del terreno.

Diseño de sistemas de riego y drenaje, ya que ayuda a calcular la cantidad de agua necesaria para cubrir una determinada área de terreno, al utilizar la fórmula del área de un círculo para calcular la cantidad de agua necesaria para regar un campo circular. También la instalación de cercas y la planificación de la ubicación de las plantaciones.

Otro ejemplo de uso de la trigonometría en la agricultura es el cálculo de la pendiente de un terreno. La pendiente es un factor importante en la agricultura, ya que puede afectar la cantidad de agua que se retiene en el suelo y la capacidad de las plantas para absorber nutriente, aplica el cálculo de la pendiente midiendo la altura y la distancia horizontal entre dos puntos en el terreno (Vázquez, 2016).

ISBN: 978-987-82912-7-7

A continuación, se presentan algunos ejemplos de la utilización de funciones trigonometría para resolver problemas dentro del contexto agronómico:

1.1. Ángulo de inclinación:

Suponga que un agricultor quiere determinar el ángulo de inclinación de una colina en su terreno. Para hacer esto, primero debe medir la altura de la colina y la distancia horizontal desde la base de la colina hasta su posición. Luego, puede usar la función trigonométrica del tangente para calcular el ángulo de inclinación.

Ejemplo numérico: Suponga que la altura de la colina es de 20 metros y la distancia horizontal desde la base de la colina hasta la posición del agricultor es de 50 metros.

Para calcular el ángulo de inclinación, podemos usar la fórmula:

$$tg\alpha \frac{altura\ de\ la\ colina}{distancia\ horizontal}$$

$$tg\alpha \frac{20}{50} = 0.4$$

Ahora, para encontrar el ángulo de inclinación en sí, podemos usar la función inversa de la tangente (también conocida como la función arco tangente o atan) en una calculadora científica:

$$\alpha = tan^{-1} 0.4$$

$$\alpha = 21.8°$$

Entonces, el ángulo de inclinación de la colina es de aproximadamente 21.8 grados. El agricultor puede usar esta información para decidir qué cultivos son adecuados para esta área y cómo debe diseñar su sistema de riego y drenaje para aprovechar al máximo el terreno.

1.2. Altura de un árbol

Suponga que un agricultor quiere determinar la altura de un árbol. Para hacer esto, primero debe medir la distancia desde el árbol hasta su posición y el ángulo de inclinación que ve desde su perspectiva. Luego, puede usar la función trigonométrica del tangente para calcular la altura del árbol.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Ejemplo numérico: La distancia desde el agricultor hasta el árbol es de 30 metros y que el ángulo de inclinación que ve desde su perspectiva es de 40 grados.

Para calcular la altura del árbol, podemos usar la fórmula:

La altura del árbol es igual a la distancia del agricultor al árbol por la tangente del ángulo de inclinación

$h = d \tan \theta$

$h = 30m \tan 40$

$h = 30m(0{,}839)$

$$h = 25{,}17m$$

Entonces, la altura del árbol es de aproximadamente 25.17 metros. El agricultor puede usar esta información para decidir cómo debe podar y cuidar el árbol para mantener su salud y maximizar su producción de frutos.

1.3. Distancia entre dos puntos:

Suponga que un agricultor quiere determinar la distancia entre dos puntos en su terreno. Para hacer esto, el agricultor debe medir el ángulo formado entre los dos puntos desde su posición y la longitud de un lado del triángulo formado por los dos puntos y su posición. Luego, puede usar la función trigonométrica del seno para calcular la distancia entre los dos puntos.

Ejemplo numérico: el agricultor quiere calcular la distancia entre dos puntos en su terreno, que forman un ángulo de 60 grados desde su posición. Además, el agricultor mide que el lado del triángulo formado por los dos puntos y su posición tiene una longitud de 50 metros.

Para calcular la distancia entre los dos puntos, podemos usar la fórmula:

distancia entre los dos puntos = longitud del lado / seno del ángulo

$$d = \frac{l}{\sin \theta}$$

distancia entre los dos puntos

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$d = \frac{50\ m}{0{,}866}$$

$$d = 57{,}74m$$

Entonces, la distancia entre los dos puntos es de aproximadamente 57.74 metros. El agricultor puede usar esta información para determinar la cantidad de agua necesaria para regar la zona de cultivo y diseñar su sistema de riego para optimizar el uso del agua.

1.4. Calcular sombra proyectada:

Suponga que un agricultor quiere calcular la longitud de la sombra proyectada por un árbol en su terreno. Para hacer esto, el agricultor debe medir la altura del árbol y el ángulo formado por la luz solar y el suelo. Luego, puede usar la función trigonométrica del seno para calcular la longitud de la sombra proyectada por el árbol.

Ejemplo numérico: la altura del árbol es de 5 metros y que el ángulo formado por la luz solar y el suelo es de 30 grados.

Para calcular la longitud de la sombra proyectada por el árbol, podemos usar la fórmula:

longitud de la sombra = altura del objeto / tangente del ángulo de elevación del sol

$$l = \frac{h}{\tan\theta}$$

Primero, necesitamos encontrar el ángulo de elevación del sol, que es el complemento del ángulo formado por la luz solar y el suelo:

ángulo de elevación del sol = 90 - 30

ángulo de elevación del sol = 60 grados

Luego, podemos encontrar la longitud de la sombra proyectada por el árbol:

$$l = \frac{5}{\tan 60}$$

$$l = \frac{5}{1{,}732}$$

$$l = 2{,}887m$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Entonces, la longitud de la sombra proyectada por el árbol es de aproximadamente 2.887 metros. El agricultor puede usar esta información para determinar cómo la sombra afectará la luz solar disponible para sus cultivos y decidir qué cultivos son adecuados para esa zona.

1.5. Dirección del viento:

Para calcular la dirección del viento, los agricultores pueden usar la función trigonométrica del coseno junto con una brújula. La brújula se utiliza para medir el ángulo formado por el norte y la dirección del viento. Llamaremos a este ángulo "θ". Entonces, podemos utilizar la fórmula del coseno para calcular la dirección del viento:

$$\cos\theta = \frac{Cat\ ady}{hipotenusa}$$

donde "cateto adyacente" es la distancia medida por la brújula en la dirección del viento y "hipotenusa" es la velocidad del viento.

Ejemplo numérico: un agricultor mide un ángulo de 45 grados entre el norte y la dirección del viento, y que la brújula indica que la distancia en esa dirección es de 10 kilómetros. Si la velocidad del viento es de 20 kilómetros por hora, podemos utilizar la fórmula del coseno para calcular la dirección del viento:

$$\cos 45 = \frac{Cat\ ady}{hipotenusa}$$

$$\cos 45 = \frac{10}{20}$$

Resolviendo para la hipotenusa:

$$\text{hip} = \frac{10}{\cos 45}$$

$$hip = 14{,}14\ km$$

Entonces, la dirección del viento es de aproximadamente 14.14 kilómetros por hora en la dirección medida por la brújula. El agricultor puede utilizar esta información para planificar la siembra de sus cultivos y aprovechar al máximo el clima y la disponibilidad de agua en el terreno.

ISBN: 978-987-82912-7-7

6.6.3.1 Método 3, 4, 5

El método 3,4, 5 en la agricultura es una técnica utilizada para medir y cuadrar parcelas de terreno de forma precisa y eficiente, es útil ya que permite una distribución adecuada de los cultivos y una planificación eficaz de la siembra. Además, de permitir a los agricultores planificar y distribuir adecuadamente los cultivos en el terreno, precisa tener una medida precisa de la parcela, con lo que se puede calcular con mayor precisión la cantidad de semillas, fertilizantes y otros recursos necesarios para obtener una cosecha óptima.

No se sabe con certeza quién desarrolló el método 3, 4, 5, pero se cree que su origen se remonta a los antiguos egipcios, quienes utilizaban métodos similares para medir y cuadrar sus campos de cultivo. El método también se ha utilizado en otras culturas antiguas, como los griegos y los romanos.

Este método se basa en la utilización de las llamadas "diagonales pitagóricas", para lo primero se mide la longitud y la anchura de la parcela de terreno, luego, se dibuja una línea diagonal desde una esquina hasta la opuesta, y se mide su longitud. Esta línea representa la diagonal pitagórica más larga del rectángulo.

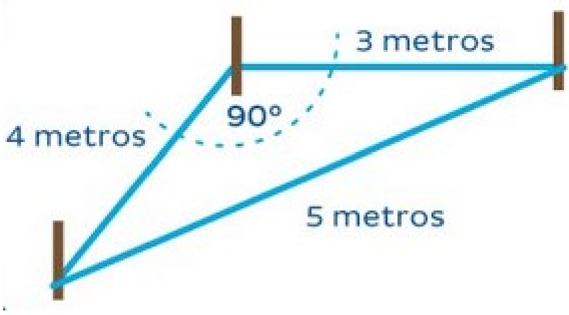
A continuación, se dibuja otra línea diagonal desde la esquina opuesta a la primera, y se mide su longitud. Esta línea representa la diagonal pitagórica más corta del rectángulo.

Finalmente, se dibuja una línea diagonal desde las dos esquinas restantes, y se mide su longitud. Esta línea representa la diagonal pitagórica intermedia del rectángulo.

Si la diferencia entre la diagonal pitagórica más larga y la más corta es inferior al 5% de la diagonal intermedia, entonces se considera que el rectángulo está cuadrado con una precisión aceptable (Fernández, 2014).

Se desea cuadrar un terreno de lago 4 metro y ancho 3 metros, al cual se debe realizar una escuadra que no es más que un ángulo de 90°, primero estas medidas se trasladan a la parcela del terreno con el uso de un flexómetro y se colocan estacas, luego se dibuja una línea diagonal desde una esquina hasta la opuesta, y se mide su longitud.

ISBN: 978-987-82912-7-7



Gráfica 93. Dimensiones para cuadrar del terreno

Esta línea representa la diagonal pitagórica más larga del rectángulo y se calcula de la siguiente manera (Gráfica 93):

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Donde:

h, representa la hipotenua o lado mas largo del triángulo

a, b, representa los dos lados restantes

Entonces:

$h = \sqrt{a^2 + b^2}$

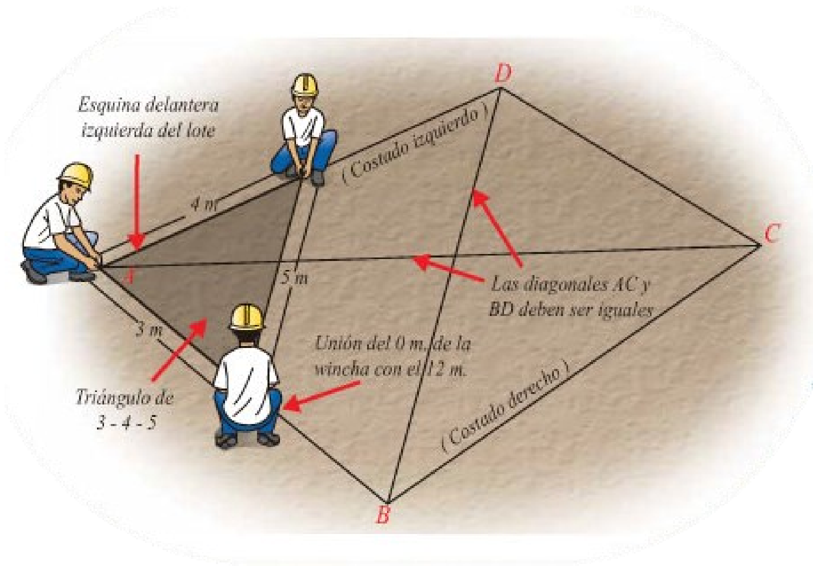
$h = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$h = \sqrt{25}$

$$h = 5$$

Para trazar la escuadra en las estacas se tiende piola esta hay que estirarla hasta obtener 12 m., es decir, la suma de *3+4+5=12 m.* Luego, uniremos el origen de la cinta (0 m) con la marca en los 12 m y lo llevaremos al extremo donde se quiere trazar la escuadra. Después, jalaremos la cinta hasta marcar los 3 m y finalmente jalaremos la cinta hasta marcar los 7 m (Gráfica 94).

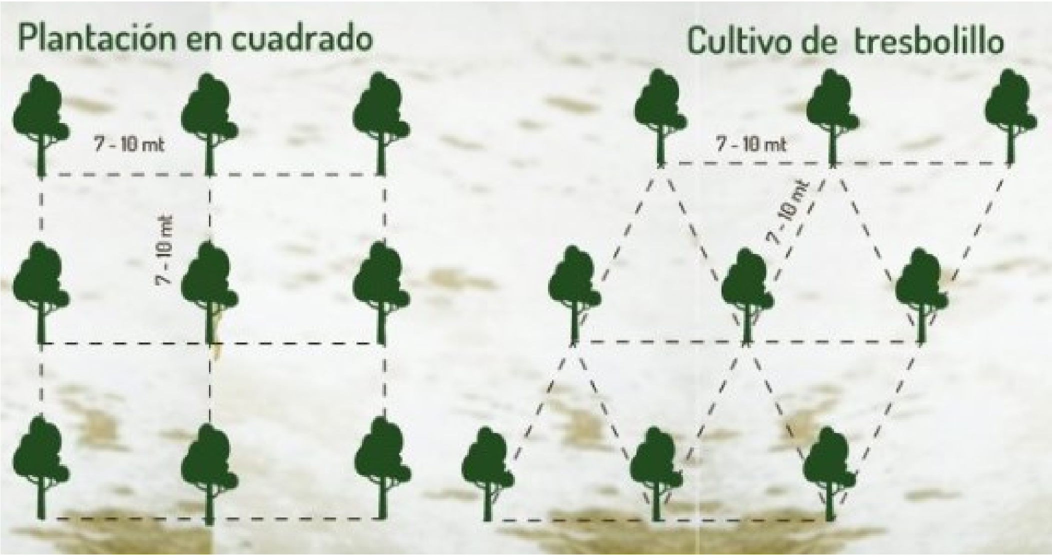
ISBN: 978-987-82912-7-7



Gráfica 94. Método 345

6.6.3.2 Sistema de siembra de tresbolillo o triángulo

Es una técnica de siembra utilizada en la agricultura en la que las plantas se colocan en un patrón triangular equilátero ver gráfica 95, se utiliza a menudo en cultivos como la caña de azúcar, el café, la soja, el maíz y otros cultivos.



Gráfica 95. Comparación geométrica sistema de plantación cuadrado y tresbolillo

Se cree que el sistema de siembra en triángulo reduce la competencia entre las plantas al permitir una mejor utilización de la luz solar y el espacio. Además, este método puede mejorar la circulación de aire en el cultivo, lo que puede ayudar a prevenir enfermedades y plagas.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Aunque el sistema de siembra en triángulo puede tener algunas ventajas, también puede ser más difícil de implementar que otros métodos de siembra más tradicionales. También puede ser más difícil de manejar con maquinaria agrícola, especialmente en áreas con pendientes pronunciadas.

El uso de la siembra en tresbolillo se ha aplicado en diversos cultivos, como el maíz, la soja, el café, la caña de azúcar y otros. En el caso del maíz, se ha encontrado que la siembra en tresbolillo puede aumentar el rendimiento y mejorar la calidad del grano. Un estudio llevado a cabo en la India encontró que la siembra en tresbolillo con una distancia de siembra de *60 cm x 30 cm* produjo un rendimiento máximo de *11.2* toneladas por hectárea, mientras que la siembra en línea recta produjo un rendimiento máximo de *9.3* toneladas por hectárea (A. Singh, 2012).

Además de mejorar el rendimiento del cultivo, la siembra en tresbolillo también puede tener otros beneficios, como reducir la erosión del suelo y mejorar la absorción de agua y nutrientes por parte de las plantas. Sin embargo, este método de siembra puede ser más laborioso y requerir más mano de obra que otros métodos de siembra.

Se presenta un ejemplo de la aplicación de la trigonometría para resolver este tipo de problemas:

Se tiene un cultivo de árboles frutales, el cual se ha plantado con el sistema tres bolillos, y se necesita calcular el número de plantas requeridas para 3 hectáreas, se conoce que la distancia entre plantas de tres metros.

Datos:

A, área del cultivo es 3 ha

dp, distancia entre planta es 3 m

Para el cálculo del número de plantas en los sistemas de plantación tresbolillo se aplica la siguiente formula:

$$Np = \frac{A}{dp * ds}$$

Donde:

A, área del cultivo

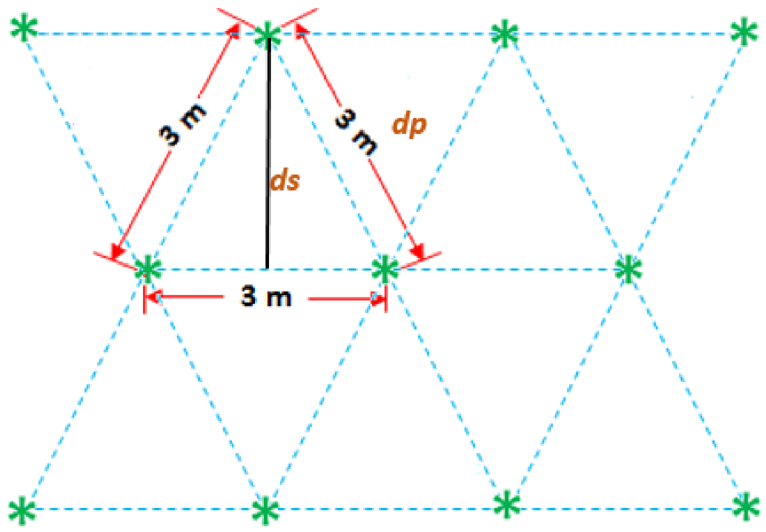
ISBN: 978-987-82912-7-7

dp, distancia entre planta

ds, distancia entre surco

Np, número de plantas

En la gráfica 96, se presenta el problema en forma grafica



Gráfica 96. Árboles frutales con sistema de plantación tres bolillos

Entonces se analizan los datos que presenta el problema y se tiene como incógnita la distancia entre surco, por lo esta se calcula utilizando la función seno de la siguiente manera:

$$sen\ 60° = \frac{ds}{3}$$

$$ds = 3sen\ 60°$$

$$ds = 2.6\ m$$

Es importante indicar que se puede utilizar como modelo para hallar la distancia entre surco, la siguiente ecuación: $ds = x * sen\ 60°$ ya que esta determina el comportamiento del fenómeno en estudio, donde x, es la distancia entre plantas.

En este momento ya se precisan de todos los datos para aplicar la formula del número de plantas, entonces:

$$Np = \frac{A}{dp * ds}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$3\ ha = 30000\ m^2$$

$$Np = \frac{30000\ m^2}{(3\ m)(2.6\ m)}$$

$$Np = 3846$$

Se concluye que el número de planta del cultivo de frutales en tres hectáreas es de 3846 plantas.

6.6.3.3 Cálculo de áreas irregulares

El cálculo de áreas irregulares es importante en la agricultura, ya que permite determinar la superficie de cultivos o terrenos que no tienen una forma regular y que no pueden ser calculados fácilmente mediante métodos geométricos tradicionales. La trigonometría se utiliza para determinar la altura de un triángulo a partir de su base y su ángulo opuesto, lo que puede ser utilizado para calcular áreas de terrenos con formas irregulares (Leiva, 2004).

El cálculo de áreas irregulares puede ser realizado utilizando conceptos de trigonometría. Una forma común de hacerlo es dividir el Gráfico en triángulos y luego calcular el área de cada triángulo usando la fórmula de área de triángulo. Luego se suman las áreas de cada triángulo para obtener el área total de la Gráfico.

A continuación, se presenta un ejemplo de cálculo de área irregular utilizando trigonometría:

Se tiene el siguiente terreno irregular, como el que se presenta en la Gráfica 97:

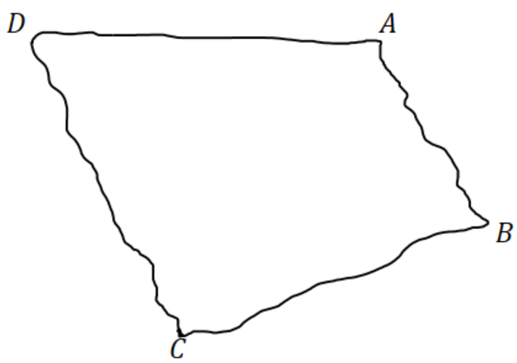


Gráfico 97. Terreno irregular

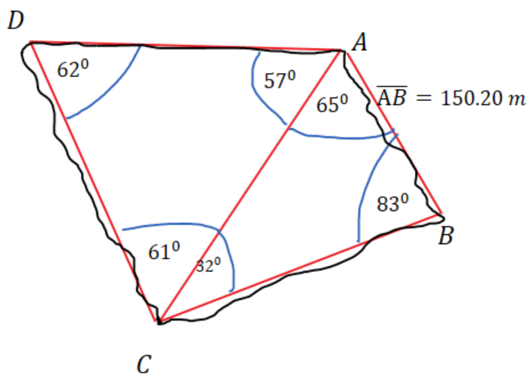
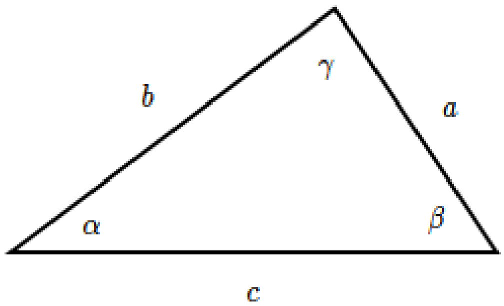


Gráfico 98. División en triángulos del terreno irregular

ISBN: 978-987-82912-7-7

Para calcular el área de la Gráfico 97, se puede dividir en dos triángulos como se presenta en la Gráfica 98. Como se puede observar los triángulos creados no son triángulos rectángulos por lo tanto para establecer relaciones entre lado y ángulos es posible utilizar la ley de los senos y cosenos, al conocer los ángulos y no todos los lados es necesario aplicar ley de senos.



Gráfica 99. Triángulo rectángulo

Ley de senos:

$$\frac{a}{sin\ (\alpha)} = \frac{b}{sin\ (\beta)} = \frac{c}{sin\ (\gamma)}$$

Para poder operar se trabajan con los siguientes datos:

$\overline{AB} = 150.20\ m$

$\measuredangle ABC = 83°$

$\measuredangle ACB = 32°$

$\measuredangle CAB = 65°$

$\measuredangle DAC = 57°$

$\measuredangle ADC = 62°$

$$\measuredangle DCA = 61°$$

Según el análisis de los datos, para encontrar el lado $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, se considera el ΔABC. Primero se aplica ley se senos entre:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } 32} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } 65}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$\frac{150}{\operatorname{sen} 32} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} 65}$$

$$\overline{BC} = 150 \frac{\operatorname{sen} 65}{\operatorname{sen} 32}$$

$$\overline{BC} = 256.541$$

En este mismo triangulo mediante el proceso anterior se puede encontrar el lado $\overline{AC}$, de la siguiente manera:

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} 32} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 83}$$

$$\frac{150}{\operatorname{sen} 32} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 83}$$

$$\overline{AC} = 150 \frac{\operatorname{sen} 83}{\operatorname{sen} 32}$$

$$\overline{AC} = 280.952$$

Ahora para encontrar el lado $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$, se considera el ΔACD, con u procedimiento similar al anteriro, se aplica ley se senos entre:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 62} = \frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 61}$$

$$\frac{280.952}{\operatorname{sen} 62} = \frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 61}$$

$$\overline{AD} = 280.952 \frac{\operatorname{sen} 61}{\operatorname{sen} 62}$$

$$\overline{AD} = 278.302$$

Lo mismo para el lado faltante en el mismo triángulo ΔACD:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 62} = \frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen} 57}$$

$$\frac{280.952}{\operatorname{sen} 62} = \frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen} 57}$$

$$\overline{CD} = 280.952 \frac{\operatorname{sen} 57}{\operatorname{sen} 62}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$\overline{CD} = 266.863$$

Ahora para estimar el área de cada triangulo considere que, conociendo los lados se encuentra el perímetro (Gráfico 99) de la siguiente manera:

$$p = \frac{\mathrm{a + b + c}}{2}$$

Entonces el área del triángulo es:

$$\mathrm{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ahora, se determina el área del triangulo ΔABC

$$\overline{AB} = 150.20\ m$$

$$\overline{BC} = 256.541\ m$$

$$\overline{AC} = 280.952\ m$$

Primero se calcula el perímetro del ΔABC

$$p\Delta ABC = \frac{150.20 + 256.541 + 280.952}{2}$$

$$p\Delta ABC = 343.847$$

Ahora se estima el área del triangulo ΔABC, de la siguiente manera:

$$A\Delta ABC = \sqrt{343.847(343.847 - 150.20)(343.847 - 256.541)(343.847 - 280.952)}$$

$$A\Delta ABC = 19121.161\ m^2$$

De manera simila al procedimieto anteriror se aplica para halla el area del triangulo ΔACD, con los siguientes datos:

$$\overline{AC} = 280.952\ m$$

$$\overline{AD} = 278.302\ m$$

$$\overline{CD} = 266.863\ m$$

En primera instancia se halla el perímetro de la siguiente manera:

$$p\Delta ACD = \frac{280.952 + 278.302 + 266.863}{2}$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

$p\Delta ACD = 413.069$

Ahora el área del triángulo ΔACDes:

$$A\Delta ACD = \sqrt{413.069(413.069 - 280.952)(413.069 - 278.302)(413.069 - 266.863)}$$

$$A\Delta ACD = 32787.608\, m^2$$

Por lo tanto, el área total del terreno irregular es la suma de las dos áreas de los triángulos.

$A = A\Delta ACD + A\Delta ABC$

$A = 19121.161\, m^2 + 32787.608\, m^2$

$$A = 51908.769\, m^2$$

El área total del terreno irregular es: $51908.769\, m^2$

6.7 MODELADO CON COMBINACIÓN DE FUNCIONES

En el capítulo 2 se aprendió que operaciones se podían realizar con funciones, en este apartado se presentan algunos ejemplos de modelado con combinación de funciones.

En ocasiones ciertas situaciones o fenómenos no se pueden explicar con una sola función sino como una combinación de estas, a continuación, se presentan ejemplos del modelado con la combinación de funciones elementales.

6.7.1 Cálculo de pago con IVA

Se requiere saber cuánto se debe pagar por la compra de x tarros de mermeladas, el único precio descrito en la etiqueta es \$ 2.5, e indica no se incluye IVA.

Se representa el valor a pagar de la siguiente manera:

$$P(x) = 2.5\, x$$

x, número de tarros a comprar variable independiente
$P(x)$, valor a pagar sin IVA de x productos.
Se multiplica por 2.5 ya que es el precio de cada tarro que no incluye IVA. Por otro lado, el IVA se puede escribir:

$$I(x) = (0.12)(2.5)x$$

Donde, se multiplica por el 12% de precio de cada producto:

ISBN: 978-987-82912-7-7

x, número de tarros a comprar variable independiente

$I(x)$, IVA de acuerdo con el número de tarros de mermelada.

Por lo tanto, para encontrar el valor total a pagar por x tarros de mermelada se tiene:

$$V(x) = (P + I)(x) = P(x) + I(x)$$

Si sustituimos las P e I, se tiene:

$$V(x) = 2.5\,x + (0.12)(2.5)x$$

$$V(x) = 2.5\,x + (0.12)(2.5)x$$

$$V(x) = 2.5\,x + 0.3x$$

$$V(x) = 2.8x$$

Como se puede observar es función es el resultado del valor a pagar x tarros de mermelada, ahora solo se debe indicar cuantos se van a comprar, en este caso $x = 10$.

$$V(x) = 2.8 * 10$$

$$V(x) = 28$$

El valor que de debe pagar por 10 tarros de mermelada a un precio sin IVA de 2.5 dolares es 28 dólares.

6.7.2 Cantidad óptima de agua a aplicar a un cultivo

Se desea determinar la función que indique la cantidad óptima de agua a aplicar a un cultivo de maíz para obtener el máximo rendimiento de la cosecha. Se sabe que la cantidad de agua aplicada afecta directamente la producción, pero también influye en la eficiencia del uso del agua. Es decir, no se trata sólo de aplicar la mayor cantidad de agua posible, sino de encontrar el equilibrio adecuado entre la cantidad de agua aplicada y la eficiencia del uso de agua.

La primera función describe la relación entre la cantidad de agua aplicada y la producción de maíz y la segunda, que describe la relación entre la cantidad de agua aplicada y la eficiencia del uso del agua.

La primera función relaciona la cantidad de agua aplicada con la producción de maíz es una función lineal:

$$P(A) = 2A$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

Donde:

A, es la cantidad de agua aplicada $[\frac{l}{\mathrm{m}^2}]$

P, es la producción de maíz $[\frac{t}{ha}]$

Se asume que cada litro adicional de agua aplicada aumenta la producción en 2 toneladas por hectárea.

Ahora la segunda función es cuadrática y relaciona la cantidad de agua aplicada con la eficiencia del uso del agua:

$$E(A) = -0.1\mathrm{A}^2 + 10A$$

Donde:

A, es la cantidad de agua aplicada $[\frac{l}{\mathrm{m}^2}]$

E, es la eficiencia del uso del agua $[\frac{k}{\mathrm{m}^3}]$ (kg de maíz producido por metro cúbico de agua aplicada).

Se asume que hay un punto máximo de eficiencia en alrededor de 50 litros por metro cuadrado y que cualquier aumento o disminución en la cantidad de agua aplicada a partir de este punto disminuye la eficiencia.

Para determinar la cantidad óptima de agua a aplicar, se puede multiplicar ambas funciones y encontrar el valor máximo de la función resultante. En este caso, la función resultante sería:

$$F(A) = -0.2\mathrm{A}^3 + 20\mathrm{A}^2$$

La función F, es la funcion que expresa la cantidad de agua a aplicar a un cultivo de maíz para obtener el máximo rendimiento de la cosecha, el valor máximo de esta función se puede encontrar mediante cálculo diferencial, y representa la cantidad óptima de agua a aplicar para obtener el máximo rendimiento de la cosecha, pero no se va a realizar ya que solo solicita la función que indique este fenómeno (Marín, 2018).

6.8 MODELADO CON COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Como se explicó en el capítulo 2, la composición de funciones es una operación matemática que consiste en aplicar una función sobre el resultado de otra función. En la

ISBN: 978-987-82912-7-7

agricultura, la composición de funciones se utiliza en una variedad de aplicaciones, incluyendo el modelado de procesos biológicos y la optimización de sistemas de riego y fertilización. A continuación, se presenta algunos ejemplos en la agricultura:

Para modelar el crecimiento de los cultivos. Por ejemplo, una función que describe el crecimiento de la planta puede ser compuesta con una función que describe la cantidad de nutrientes disponibles en el suelo para predecir el crecimiento futuro de la planta. De esta manera, se pueden tomar decisiones informadas sobre cuándo y cuánto fertilizante aplicar.

Para optimizar el riego en los sistemas de irrigación. Por ejemplo, una función que describe el caudal del agua puede ser compuesta con una función que describe la absorción de agua por la planta para determinar la cantidad adecuada de agua que debe ser suministrada. Esto ayuda a reducir el desperdicio de agua y a mejorar la eficiencia del sistema de riego.

Para analizar la calidad del suelo y predecir su capacidad de producir cultivos. Por ejemplo, una función que describe la porosidad del suelo puede ser compuesta con una función que describe la capacidad de retener agua para predecir la cantidad de agua disponible para las plantas. Esto ayuda a tomar decisiones informadas sobre la fertilización y el riego (Seufert, 2017).

Entonces, se desarrollan a continuación algunos ejercicios:

6.8.1 Conversión de horas en segundos

Sea hallar una función que convierta horas en segundos, partiendo de conocer la función f, que es la función que convierte las horas en minutos, y función g que convierte los minutos a segundos.

Para calcular los minutos se tiene:

h, horas, variable independiente

$f(h)$, la conversión a minutos en función de las horas

A las horas se multiplica por 60, ya que es el número de minutos que contiene una hora. Entonces:

$$f(h) = 60\,h$$

Para calcular los segundos se tiene:

m, minutos, variable independiente

$g(m)$, la conversión a segundos en función de los minutos

$$g(m) = 60m$$

ISBN: 978-987-82912-7-7

A los minutos se multiplica por 60, ya que es el número de segundos que contiene un minuto. Entonces:

Y ya que la composición de funciones es una operación matemática que consiste en aplicar una función sobre el resultado de otra función, por lo tanto, para transformar en segundos la hora en segundos, entonces tenemos:

$$(g \circ f)(h) = g\big(f(h)\big)$$

Pues los segundos estan en funcion de los minutos por lo tanto queda:

$$(g \circ f)(h) = g(60h)$$

$$(g \circ f)(h) = 60(60h)$$

$$(g \circ f)(h) = 3600h$$

Esta función compuesta nos da una estimación precisa de los segundos de acuerdo con el número de horas.

6.8.2 Producción anual en función del número de arboles

La producción anual de naranjas de una huerta es función del número de árboles plantados en la huerta; el número de árboles plantados es función de la fertilidad del terreno. La producción anual es pues función de la fertilidad del terreno.

El problema plantea que la producción anual de naranjas de una huerta depende del número de árboles plantados, y que este número a su vez depende de la fertilidad del terreno. Por lo tanto, la producción anual de naranjas es una función de la fertilidad del terreno.

Se representa la producción anual de naranjas como una función de la cantidad de árboles plantados, podemos escribir:

$$P(a) = k\ a$$

k, constate, número promedio de naranjas por árbol que depende de la huerta y de las variedades de naranjas cultivadas (en las mejores condiciones expertos coinciden 500 unidades)

a, número de árboles plantados, variable independiente

$P(a)$, producción anual de naranjas en función del número de árboles

Por otro lado, si el número de árboles plantados es una función de la fertilidad del terreno, se puede escribir:

ISBN: 978-987-82912-7-7

$$a(f) = mf$$

Donde:

m, constante, depende del tipo de árbol y de la huerta

f, fertilidad del terreno, variable independiente

$a(f)$, número de árboles plantados en función de la fertilidad del terreno.

Por lo tanto, para encontrar la producción anual en función de la fertilidad se tiene:

$$(P \circ a)(f) = P\big(a(f)\big)$$

Si sustituimos la segunda ecuación en la primera, se tiene:

$$(P \circ a)(f) = ka(f)$$

Por lo tanto, la producción anual de naranjas es una función lineal de la fertilidad del terreno.

$$(P \circ a)(f) = kmf$$

Ahora, el promedio de naranjas por año de un árbol es de $k = 500$, entonces:

$$(P \circ a)(f) = 500mf$$

Esta relación es importante en la agricultura, ya que permite estimar la producción de una huerta en función de la fertilidad del terreno, lo que puede ser útil para planificar la siembra de cultivos y determinar la cantidad de fertilizantes necesarios. Además, puede ayudar a los agricultores a identificar los terrenos más adecuados para el cultivo de naranjas y otros cítricos.

ISBN: 978-987-82912-7-7

RESUMEN DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES

<table>
<tr><td rowspan="7">Algebraicas</td><td rowspan="4">Polinómicas</td><td>Lineales</td><td colspan="3">$f(x) = a_0 + a_1x$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Grado n</td><td rowspan="3">$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +..+a_nx^n$
$a_n \neq 0$ y $n > 1$</td><td>Cuadráticas</td><td>$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_2 \neq 0$ y $n = 2$
$f(x) = a(x + x_v)^2 + y_v$, (x_v, y_v), vértice de la parábola</td></tr>
<tr><td>Cubicas</td><td>$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $a_3 \neq 0$ y $n = 3$</td></tr>
<tr><td>Otras</td><td>$(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +..+a_nx^n$, si $a_n \neq 0$ y $n > 3$</td></tr>
<tr><td>Racionales</td><td colspan="4">$f(x) = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+..+b_nx^m} = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x) \neq 0$</td></tr>
<tr><td>Radicales</td><td colspan="4">$f(x) = \sqrt[n]{\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+..+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+..+b_nx^m}} = \sqrt[n]{\frac{p(x)}{q(x)}}$</td></tr>
<tr><td>A trozos</td><td colspan="4">$f(x) = \begin{cases} h(x) & , x \epsilon I_1 \\ g(x) & , x \epsilon I_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Trascendentes</td><td>Exponenciales</td><td colspan="4">$f(x) = a^x, : a \in R, a > 0, a \neq 1$</td></tr>
<tr><td>Logarítmicas</td><td colspan="4">$f(x) = log_a x, a \in R, a > 0, a \neq 1,$</td></tr>
<tr><td>Trigonométricas</td><td colspan="4">$y = sen(x), y = cos(x), y = tg(x),$
$y = sec(x), y = \csc(x), y = ctg(x)$</td></tr>
</table>

ISBN: 978-987-82912-7-7

SIMBOLOGÍA

Ca: Calcio

CaO: Óxido de calcio

$CaCO_3$: Carbonato de calcio

CIC: Capacidad de Intercambio Catiónico

CO_2: Anhídrido de carbono

C/N: Relación carbono nitrógeno

ºC: Grados centígrados

CIA: Capacidad de Intercambio Aniónica

Cmol/l: Centimoles porlitro

cm: Centímetros

dS/m: Decisiemens por metro

eq/kg: Equivalente químico por kilogramo

Eq: Equivalente químico

EM: Microorganismos eficientes

g/m^3: Gramos por metro cúbico

g/Tn: Gramos por tonelada

HCl: Ácido clorhídrico

K: Potasio

kg/ha: Kilogramo por hectárea

kg: Kilogramo

K_2O: Óxido de potasio

l: Litro

ISBN: 978-987-82912-7-7

Lbs: Libras

l/m^3: Litro por metro cúbico

Mg: Magnesio

MgO: Óxido de magnesio

Mmhos/cm: Mili mohos por centímetro

mS/cm: Mili siemens por centímetro

mg/kg: Miligramos por kilogramo

mg/l: Miligramo por litro

Meq: Miliequivalente

Meq/100 g: Miliequivalente por 100 gramos

mmol/l: Mili moles por litro

mmol/kg: Mili moles por kilogramo

mol/m^3: Mol por metro cúbico

m: metro

m^2: metro cuadrado

m^3: metro cúbico

n: valor a dimensional

N: Nitrógeno

Na: Sodio

NaOH: Hidróxido de sodio

NO_2: Di óxido de nitrógeno o nitrito

N - NO_3: Nitrógeno en forma de nitrato

N - NH_4: Nitrógeno en forma de ion amonio

ISBN: 978-987-82912-7-7

NH_3: Amoniáco

%: Porcentaje

ppm: Partes por millón

P: Fósforo

P_2O_5: Penta óxido de fósforo

PO_4: Ión fosfato

pH: Potencial hidrógeno

SO_4: Ión sulfato

µg/ml: Microgramos por mililitro

µmol/g: Micro mol por gramo

UF: Unidad fertilizante

ISBN: 978-987-82912-7-7

ISBN: 978-987-82912-7-7

7 BIBLIOGRAFIA

Al-Jamal, M. (2013). *Application of mathematical models in agriculture*. https://doi.org/10.1016/j.jssas.2012.06.002

Amthor, J. (2000). The McCree–de Wit–Penning de Vries–Thornley respiration paradigms: 30 years later. *Annals of Botany*.

Anderson. (2015). Applied groundwater modeling: Simulation of flow and advective transport. *Academic press*.

Arcos, F. (2013). *FERTILIDAD Y NUTRICION VEGETAL*.

Arumí, J. (2006). *Modelación del impacto de prácticas de manejo agrícola en las aguas subterráneas*. http://www.bvsde.paho.org/bvsacd/encuen/model.pdf

Arzadun. (2020). *Microeconomía*. https://repositoriotec.tec.ac.cr/bitstream/handle/2238/11348/curva_oferta_micro_cap11.pdf?sequence=1&isAllowed=y

ASA-CSSA-SSSA. (1990). *Publication Handbook and Style Manual. In: Agricultural Salinity Assessment and Management*.

Asadi-Shekari, Z. (2015). Modeling of wheat yield response to irrigation and nitrogen under different climatic conditions using a quadratic response surface model. *Agricultural Water Management*.

Belcher, K. (2004).

Bolker, B. (2008). Ecological Models and Data in R. *Princeton University Press*.

Bowen, W. (2001).

Brady, N. (2016). The nature and properties of soils. *Pearson*.

Candelaria Martínez, B., Ruiz Rosado, O., Gallardo López, F., Pérez Hernández, P., Martínez Becerra, Á., & Vargas Villamil, L. (2011). Aplicación de modelos de simulación en el estudio y planificación de la agricultura, una revisión. *Tropical and subtropical agroecosystems*, *14*(3), 999-1010. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1870-04622011000300004&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Cao, J. (2021). A quadratic regression model for biogas production from maize stalks: Effect of harvest time and cutting length. *Bioresource Technology*.

Casida, J. (2004). Golden age of insecticide research: Past, present, or future? *Annual review of entomology*.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Casierra, F. (2007). *Análisis del crecimiento en frutos de tomate (Lycopersicon esculentum Mill.) cultivados bajo invernadero*. http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0120-99652007000200012&script=sci_arttext&tlng=es

Castellazzi, M. (2008). *A systematic representation of crop rotations.*

Chávez, D. (2013). La Matemática: Una herramienta aplicable a la Ingeniería Agrícola. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2071-00542013000300014&lng=es&tlng=es.

Chen, X. (2017). Nutrient uptake and nitrogen use efficiency of maize (Zea mays L.) under different levels of nitrogen fertilization in soils with various organic matter content. *PloS one*. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0171961

Cory, G. (2002). *WEPP simulation of observed winter runoff and erosion in the U.S. Pacific Northwest.*

Cropaia. (2021, abril 15). *Las unidades en el informe del análisis de suelo | Cropaia*. https://cropaia.com/es/blog/analisis-de-suelo-unidades/

Cropaia1. (2020, abril 3). *Conversión de unidades agrícolas | Cropaia*. https://cropaia.com/es/blog/conversion-unidades-agricolas/

Djebali. (2015). Growth and yield components of durum wheat genotypes under drought stress: Morphological and physiological traits. *Journal of Agronomy and Crop Science*. https://doi.org/10.1111/jac.12105

Duan, L. (2017). Quadratic programming irrigation scheduling model for maize based on soil water content and meteorological data. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*.

Dunne, T. (1978). Water in environmental planning. *Freeman*.

Escalant, E. (2008). Modeling bean root growth in soil: Comparison of linear and nonlinear approaches. *Agronomy Journal*. https://doi.org/10.2134/agronj2007.0183

Euskadi. (2022). *Funtzio trigonometrikoak—Hiru*. https://www.hiru.eus/es/matematicas/funciones-trigonometricas

Fang, Y. (2020). *Application of Microsoft Excel in Analysis of Soil Moisture Data for Precision Irrigation*. https://www.mdpi.com/2073-4395/10/2/246

FAO. (2013a). *Guía para la conversión de unidades en la agricultura*. http://www.fao.org/3/a-i3461s.pdf

ISBN: 978-987-82912-7-7

FAO. (2013b). *Unidas para la Alimentación y la Agricultura). (2013). Guía para la conversión de unidades en la agricultura*. http://www.fao.org/3/a-i3461s.pdf

Faroni, A. (1992). *´Influencia de la temperatura sobre los parámetros biológicos de Rhyzopertha dominica*. https://www.miteco.gob.es/ministerio/pags/biblioteca/plagas/BSVP-18-02-455-467.pdf

Feddes, R. (1978). Simulation of field water use and crop yield. *Simulation monographs*.

Fernández, E. (2014). *Determinación de la superficie de un terreno agrícola utilizando el método 345*. Revista Ingeniería de Construcción. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50732014000200002&lng=es&tlng=es

García, F. (2014). Root Growth and Functioning under Abiotic Stress Scenarios. *Plant Roots: The Hidden Half*. https://doi.org/10.1201/b17061-16

García, M. (2003). Modelos matemáticos para la producción vegetal. *Universidad Nacional de Colombia*.

Garg, S. (2019). *Response of tomato to nitrogen and potassium fertilization under drip irrigation system*.

GeoGebra. (2022). *La interfaz de GeoGebra*. https://geogebra.es/cvg/manual/interfaz/index.html

Ghasemi, S. (2016). Wheat yield prediction using the logistic equation with N application rates and climatic data. *Agricultural Water Management,*.

Giraldo, J. (2013). *Evaluación de la humedad en suelos cultivados con fríjol (Phaseolus vulgaris) mediante el uso de técnicas de teledetección*.

Giraldo, L. (2007). *Adaptación del modelo DSSAT para simular la producción de Brachiaria decumbens.*

Gómez, J. (2008). Matemáticas para ciencias agrarias. *Pearson Educación*.

Granada. (2010). *Cálculo de Dosis letal*.

Gutiérrez, C. (2002). *Escenarios para el aprovechamiento del acuífero del Valle de Querétaro.*

Guzmán, G. (2005). *Aplicación de los sistemas de información geográfica en la agricultura de precisión*.

Hall, J. (2019). *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*.

Hernández, F. (2022). *Fluctuaciones d precio*. https://www.agro-tecnologia-tropical.com/fluctuaciones_de_precio.html

ISBN: 978-987-82912-7-7

Hernández, G. (1996). *Modelaje de la erosión de suelos en Costa Rica mediante el modelo WEPP*.

Hinsinger, P. (2003). Origins of root-mediated pH changes in the rhizosphere and their responses to environmental constraints: A review. *Plant and Soil*.

Holmann, F. (1997). *Alternativas en la Región Pacífico Central de Costa Rica: Un modelo de simulación aplicable a sistemas de doble propósito.*

Hukumchand, V. (2015). Applications of mathematical functions in agriculture. *International Journal of Science and Research,*.

Hunt, R. (1982). Plant growth curves: The functional approach to plant growth analysis. *Edward Arnold Publishers*.

Hunt, R. (2016). *Plant growth curves: The functional approach to plant growth analysis*.

IICA. (2014). *Manual de agricultura de precisión*. http://www.gisandbeers.com/RRSS/Publicaciones/Manual-Agricultura-Precision.pdf

Ishida, K. (2012). Non-linear relationship between stem diameter and specific hydraulic conductivity of the stem in pimiento (Capsicum annuum L.). *Journal of Horticultural Science & Biotechnology*. https://doi.org/10.1080/14620316.2012.11512839

Jiang, Y. (2020). *Dynamic modeling and prediction of olive tree diameter and height growth based on LSSVM and polynomial regression models*.

Jiménez, E. (2009). *Métodos de Control de Plagas*.

Jovanovic, N. (2019). A novel approach to estimating soil infiltration rates for precision irrigation management in vineyards. *Agricultural Water Management*.

Just EXW. (2022). *Las partes de las hojas de Excel*. https://es.justexw.com/las-partes-de-las-hojas-de-excel.html

Kang, Y. (2018). *Modeling soybean growth and yield with functions of leaf area and leaf area ratio*.

Leiva, L. (2004). Métodos para el cálculo de áreas y volúmenes en topografía. *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*.

Li, L. (2020). Root growth and water uptake of wheat seedlings under heterogeneous soil moisture conditions. *Irrigation Science*.

Li, X. (2020). Modeling the growth of tomato (Solanum lycopersicum L.) in response to temperature using quadratic polynomial equations. *Horticulture, Environment, and Biotechnology*.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Li, Y. (2017). Importance of Unit Conversion in Agricultural Research. *Journal of Agricultural Science*.

Liu, H. (2016). A sigmoid function for fitting growth curves of greenhouse cucumber. *Journal of plant growth regulation*. https://doi.org/10.1007/s00344-015-9532-1

Liu, Y. (2015). A new method for modeling microbial population dynamics in soil using exponential growth functions. *Environmental Science and Pollution Research*.

López, I. (2016). The use of the exponential growth function in plant growth analysis. *Agric Sci Technol*.

López, J. (2014). *Importancia de la enseñanza de funciones en bachillerato La importancia... | Download Scientific Diagram*. https://www.researchgate.net/figure/Figura-6-Importancia-de-la-ensenanza-de-funciones-en-bachillerato-La-importancia-de-la_fig2_308516835

Ma, L. (2016). An optimization model for water-saving irrigation scheduling based on quadratic programming in paddy fields. *Agricultural Water Management*.

Madridmas. (2019). *¿Para que sirven las raíces cuadradas? - Matemáticas y sus fronteras*. https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2019/09/29/146990

MAG. (2021). *Tomate riñón*. http://sipa.agricultura.gob.ec/index.php/situacionales-agricolas/situacional-tomaterinon

Maiti, A. (2018). Piecewise linear regression modeling of growth curves of tea (Camellia sinensis L.) plants in response to nitrogen nutrition. *Journal of Plant Nutrition*.

Marassi, M. (2020). http://intranet.exa.unne.edu.ar/biologia/fisiologia.vegetal/

Marín, S. (2018). Water Use Efficiency in Agriculture. In The Importance of Water Management in Arid and Semi-Arid Regions. *Springer*.

Marty, F. (2019). Modeling and simulation of growth curves in plants: A review. *Frontiers in plant science*. https://doi.org/10.3389/fpls.2019.01366

Maza, R. (2019). Piecewise Functions and Their Applications in Agricultural Engineering. *In Mathematics and Computing in Agriculture and Nutrition*.

Meza, G. (2019). Linear and Piecewise Linear Models in Agricultural Engineering. *Springer, Cham*.

Morante, C. (2019). *Matemática para Agricultores*. http://flasa.msinfo.info/portal/bases/biblo/texto/Matematicas_agricultores_Morante_Romero_corg.pdf

Navarro, N. (2010). *Curvas de degradación de pesticidas usados en el cultivo de la vid para el control de Lobesia botrana*. https://inta.gob.ar/sites/default/files/inta_-

ISBN: 978-987-82912-7-7

_curvas_de_degradacion_de_pesticidas_usados_en_el_cultivo_de_la_vid-_revista_inv-_26_febrero_2016.pdf

Nderitu, J. (2020). *Predictive model for tomato yellow leaf curl virus spread using SEIR model*.

NETAFIN. (2021). *Seleccion y diseno de equipos de inyeccion de fertilizante/*. https://www.netafim.com.mx/blog/Seleccion-y-diseno-de-equipos-de-inyeccion-de-fertilizante/

OpenStax. (2023). *4.8 Ajustar modelos exponenciales a los datos—Precálculo 2ed | OpenStax*. https://openstax.org/books/precálculo-2ed/pages/4-8-ajustar-modelos-exponenciales-a-los-datos

Ortega, J. (1999). *Modelo de optimización económica del manejo del agua de riego en las explotaciones agrícolas: Aplicación de la agricultura de regadío de la provincia de Toledo*.

Ozturk, A. (2020). *Geogebra application in the analysis of the relationship between temperature and yield of greenhouse tomatoes*.

Padhi, J. (2019). Optimal allocation of water for rice cultivation using a function of crop growth stage and water depth. *Optimal allocation of water for rice cultivation using a function of crop growth stage and water depth*.

Palin. (2023). *Función matemática—Definicion.de*. Definición.de. https://definicion.de/funcion-matematica/

Pandey, R. (2019). Effect of organic matter on soil fertility and yield of rice. *International Journal of Agriculture, Environment and Bioresearch*.

Pérez, M. (2006). *Modelos de simulación para la elaboración y evaluación de los programas de servicios ambientales hídricos*.

Philip, J. (1957). The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil Science*.

Preciado, R. (2002). *Simulación del crecimiento de maíces precoces en condiciones de secano*.

Rabelo, G. (2018). Polynomial regression to estimate growth and yield of tomato in response to nitrogen fertilization. *Journal of Plant Nutrition*.

Ramírez, I. (2017). *Análisis de Datos Agropecuarios*. http://repositorio.utmachala.edu.ec/bitstream/48000/14462/1/CAP-5.EstadisticaBasicaConDatosAgropecuarios.pdf

Rencz, N. (2015). Mathematical modeling of the growth of papaya plants based on rational functions. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*.

Richards, F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*.

Rodríguez, J. (2000). *Planificación de recursos para la modernización de los sistemas arroceros mediante el empleo de modelos de simulación y SIG*.

Rui, X. (2014). Application of exponential distribution in corn seeding uniformity. *Journal of Agricultural Science and Technology*.

Sancho, H. (2020). *Curvas de absorción de nutrientes*. http://intranet.exa.unne.edu.ar/biologia/fisiologia.vegetal/CURVAS%20DE%20ABSORCION%20DE%20NUTRIENTES.pdf

Seufert, V. (2017). Composition and function of agricultural soils in the world. *Springer*.

Sharma, P. (2018). Use of linear regression model in predicting the yield of wheat. *Agricultural Research Journal*.

Silva, O. (2001). *Uso de modelos de simulación para evaluar sistemas agrícolas de subsistencia en tierras de ladera. 2nd International Symposium Modelling Cropping*.

Singels, A. (1991). *Determination of optimum wheat cultivar characteristics using a growth model.*

Singh, A. (2012). Optimum plant population and row spacing for higher yield in maize (Zea mays L.) under mid-hill conditions of Himachal Pradesh. *Indian Journal of Agricultural Sciences*.

Singh, K. (2014). Agricultural Applications of Mathematics. *International Journal of Research in Agriculture and Food Sciences*. https://www.researchgate.net/publication/269698718_Agricultural_Applications_of_Mathematics

Singh, M. (2017). Importance of Unit Conversions in Agronomy. International. *Journal of Pure and Applied Bioscience*.

Singha, P. (2016). A rational function approach to model nutrient response of a crop. *Ecological Modelling*.

Smartick. (2015, marzo 16). *Ejercicios de números proporcionales*. https://www.smartick.es/blog/matematicas/numeros-enteros/ejercicios-de-numeros-proporcionales/

Sokolowski, J. (2018). *Modeling and Simulation Fundamentals: Theoretical Underpinnings and Practical Domains*.

SQM. (2021). *Manejo de nutricion del tomate*. https://sqmnutrition.com/essays/manejo-de-nutricion-del-tomate/

Sripada, R. (2018). Comparison of piecewise linear and nonlinear models for modeling crop yield responses to water. *Agricultural Water Management*.

Sterling. (2014). *Trigonometry for Dummies*.

Stewart. (2007a). Single variable calculus: Early transcendentals. *Cengage Learning*.

Stewart, J. (2007b). Single variable calculus: Early transcendentals. *Cengage Learning*.

Streck, A. (2006). *Simulacao do impacto da mudanca climática sobre a água disponível do solo em agroecossistemas de trigo, soja e milho em Santa Maria*.

Torgersen, T. (2002). *Modeling root-water uptake: I. Analysis of steady-state data obtained in a rhizotron with plants exposed to a salinity gradient*.

Torres, R. (2021). *Importancia de las ciencias matemáticas en la agricultura*. https://www.greenworldjournal.com/_files/ugd/dac1d8_2042662c8896452ab8b2a0ca09950c95.pdf?index=true

UDEC. (2020). *Campana de Gauss*.

USDA. (2004). *Soil Quality Indicators: Infiltration*.

Van, H. (2006). *Mathematical modeling and simulation for optimizing crop management in precision agriculture*. https://link.springer.com/article/10.1007/s11119-006-9015-5

Vázquez, R. (2016). *Aplicaciones de la trigonometría en la agricultura*.

Venkatasubramanian, V. (2017). *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*.

Verhulst, P. (2018). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. Corresp. *Math. Phys*.

Villarraga, S. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación*.

Walter, C. (2003). *Spatio-temporal simulation of the field-scale evolution of organic Carbon over the landscape*.

Williams, J. (1984). *A modeling approach to determining the relationship between erosion and productivity*.

Yang, Y. (2020). Modeling potato growth and development based on meteorological and agronomic factors. *Agricultural Water Management*.

YARA. (2022). *3.9. Relación calidad de frutos con fertilización*.

ISBN: 978-987-82912-7-7

Yu, Q. (2021). Modeling the impact of soil tillage practices on maize yield in Northeast China using a functions-based model. *Soil and Tillage Research*.

Zaman, M. (2020). Optimal irrigation scheduling of wheat using quadratic optimization model under limited water resources. *Computers and Electronics in Agriculture*.

Zeng, X. (2018). Modeling the population dynamics of strawberry mite pests using exponential models. *Journal of Plant Diseases and Protection*.

Zhang, J. (2020). Modeling the degradation of pesticides in soils using exponential and power functions. *Environmental Science and Pollution Research*.

ISBN: 978-987-82912-7-7

ISBN: 978-987-82912-7-7

DE LOS AUTORES

Carmen Elena Mantilla Cabrera

Magíster en Seguridad Telemática, Máster en Ingeniería Matemática y Computación, Ingeniera en Electrónica y Computación. Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo desde el 2018. Miembro del Grupo de Investigación Seguridad Informática y Telecomunicaciones, Grupo de Investigación de Energías Renovables y del Centro de Energías Alternativas CEAA-ESPOCH. Investigador de los proyectos: Estudio del potencial energético de la provincia del Chimborazo apoyado únicamente con energías renovables, Simulación computacional de potencial eólico en la provincia de Chimborazo, Desarrollo de una investigación aplicada para el diseño de herramientas tecnológicas para aprendizaje de energías alternativas en la ciudad de Riobamba, Solución SDN - sistema de aprendizaje para identificación y clasificación de amenazas internas que mejoren el control y la seguridad en intranets académicas y Macro optimización técnica y económica del proyecto de los parques eólicos. Aplicación en la provincia de Chimborazo - Ecuador. Ha publicado obras de relevancia y artículos científicos.

carmen.mantilla@espoch.edu.ec

ISBN: 978-987-82912-7-7

Víctor Alberto Lindao Córdova

PhD. en Ciencias Ambientales, Máster en Ciencias Mención Agricultura Sustentable, Ing. Agrónomo, Docente de La Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) desde el 2001, Coordinador de la Carrera de Agronomía de la Facultad de Recursos Naturales, Miembro del Comité Científico de la ESPOCH.

Docente en los programas de Maestría en Agronomía Mención Nutrición Vegetal, Agronomía Mención Nutrición Vegetal, Maestría en Economía y Administración de la ESPOCH y la Universidad Técnica de Ambato. Ponente en Taller Diseño Experimental en la Investigación Científica Universidad Nacional Mayor de San Marcos Facultad de Bioquímica y Farmacia.

Miembro de los Grupos de Investigación: Conservación y Producción Sustentable de los Recursos Naturales y Entomológicos COPROSURENE, Investigación de Desarrollo, Ambiente y Cambio Climático GIDAC. Director del Proyecto "Caracterización de La Diversidad Y Conservación De Abejas Nativas Sin Aguijón (Hymenoptera: Meliponini) En Diferentes Sistemas Antrópicos De Producción En La Amazonía Ecuatoriana". Autor de obras de relevancia y artículos científicos. Experiencia profesional Jefe Técnico y de Mercadeo de Ornamentales Farmagro, Representante de ventas y técnico para Ecuador Cosmocel.

victor.lindao@espoch.edu.ec

ISBN: 978-987-82912-7-7

Ruth Genoveva Barba Vera

Doctora en Ingeniería (c) por la Pontificia Universidad Católica del Perú, Magíster en Interconectividad de Redes e Ingeniera en Electrónica y Computación por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Docente de la ESPOCH desde 2007, Técnico Docente de la facultad de Informática y Electrónica desde 2015 donde colabora en la carrera de Telecomunicaciones con diversos proyectos de investigación y vinculación.

Investigadora Senior de la ESPOCH, es Coordinadora Subrogante del Grupo de Investigación en Seguridad Informática y Telemática (SEGINTE).

Directora del proyecto de investigación: Solución SDN - sistema de aprendizaje para identificación y clasificación de amenazas internas que mejoren el control y la seguridad en intranets académicas.

Investigadora en proyectos de investigación relacionados con el diseño de herramientas tecnológicas para aprendizaje de energías alternativas y Desarrollo de un proceso de digitalización de fotografías captadas en material fotosensible, éste último en ejecución.

Directora de tesis de postgrado. Autora de artículos indexados y de alto impacto en las áreas de educación, electrónica, TICs, seguridad informática, redes de siguiente generación SDN.

ruth.barba@espoch.edu.ec

ISBN: 978-987-82912-7-7

Pablo Israel Álvarez Romero

Doctor en Ciencias en Fitopatología con especialidad en Epidemiología y Ecología Molecular de Microorganismos en la Universidad Federal de Viçosa, Brasil, en 2019. Magíster en Ciencias Agropecuarias y Recursos Naturales con especialidad en Sanidad y Mejoramiento Genético Vegetal en la Universidad Autónoma del Estado de México, México, en 2014. Ing. Agrónomo en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en 2005. Con más de 10 años de experiencia en manejo integrado de enfermedades en diferentes patosistemas en la Empresa Privada. Desde 2019, el Dr. Álvarez labora en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Recursos Naturales impartiendo las asignaturas de Fitopatología, Control y Manejo de Enfermedades, Sanidad Vegetal y Biotecnología.

Actualmente colabora en diferentes proyectos asociados a SANIDAD VEGETAL con organismos nacionales e internacionales como el INIAP, AGROCALIDAD, El Colegios de Posgraduados en México, La Universidad Nacional de Asunción en Paraguay, La Universidad Federal de Amazonas en Manaos, Brasil y La Universidad Federal de Viçosa en Brasil.

pabloi.alvarez@espoch.edu.ec

PUERTO MADERO
EDITORIAL

ISBN 978-987-82912-7-7
9 789878 291277

puertomaderoeditorial.com.ar