1era Ed.
2024

PUERTO MADERO EDITORIAL

MÉTODOS NUMÉRICOS

ISBN:978-631-6557-41-4

JOSÉ OMAR CABRERA ESCOBAR
LENIN OROZCO CANTOS
RAÚL VINICIO CABRERA ESCOBAR

puertomaderoeditorial.com.ar
La Plata - Argentina

Métodos Numéricos

ISBN: 978-631-6557-41-4

ISBN: 978-631-6557-41-4

Métodos Numéricos

AUTORES:

José Omar Cabrera Escobar
Lenin Santiago Orozco Cantos
Raúl Vinicio Cabrera Escobar

ISBN: 978-631-6557-41-4

Cabrera Escobar, José Omar
Métodos numéricos / José Omar Cabrera Escobar ; Lenin Orozco Cantos ; Raúl Vinicio Cabrera Escobar. - 1a ed - La Plata : Puerto Madero Editorial Académica, 2024.
Libro digital, PDF/A

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-631-6557-41-4

1. Algoritmo. 2. Cálculo Integral. 3. Ecuaciones. I. Orozco Cantos, Lenin II. Cabrera Escobar, Raúl Vinicio III. Santillán Lima, Juan Carlos, ed. IV. Título
CDD 515.3

ISBN: 978-631-6557-41-4

Primera Edición, Septiembre 2024

Métodos Numéricos
ISBN: 978-631-6557-41-4

Editado por:
Sello editorial: ©Puerto Madero Editorial Académica
Nº de Alta: 933832

Editorial: © Puerto Madero Editorial Académica
CUIL: 20630333971
Calle 45 N491 entre 4 y 5
Dirección de Publicaciones Científicas Puerto Madero Editorial Académica
La Plata, Buenos Aires, Argentina
Teléfono: +54 9 221 314 5902
+54 9 221 531 5142
Código Postal: AR1900

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review)

Corrección y diseño:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: José Luis Santillán Lima

Diseño, Montaje y Producción Editorial:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: Santillán Lima, José Luis

Director del equipo editorial: Santillán Lima, Juan Carlos

Editor: Santillán Lima, Juan Carlos

Hecho en Argentina
Made in Argentina

ISBN: 978-631-6557-41-4

ISBN: 978-631-6557-41-4

AUTORES:

José Omar Cabrera Escobar

Universidad Nacional de Chimborazo. Riobamba. Ecuador

omar.cabrera@unach.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-0197-5163

Lenin Santiago Orozco Cantos

Universidad Nacional de Chimborazo. Riobamba. Ecuador

lenin.orozco@unach.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-4202-3633

Raúl Vinicio Cabrera Escobar

Universidad de Jaén. Jaén. España

rvce0001@red.ujaen.es

https://orcid.org/0009-0005-8589-7578

ISBN: 978-631-6557-41-4

ISBN: 978-631-6557-41-4

CONTENIDO

ISBN: 978-631-6557-41-4

ISBN: 978-631-6557-41-4

ISBN: 978-631-6557-41-4

AGRADECIMIENTOS

Queremos expresar nuestro más profundo agradecimiento a nuestro maestro Raúl Ernesto Cabrera Funes, por su inestimable colaboración en la realización de este libro de Métodos Numéricos. Su guía y apoyo han sido fundamentales para completar esta obra.

Además, queremos reconocerlo como nuestro docente en la asignatura de Métodos Numéricos. Sus enseñanzas, paciencia y dedicación no solo nos han brindado los conocimientos necesarios, sino que también han inspirado nuestra pasión por esta disciplina. Su compromiso con la educación y su ejemplo como mentor han dejado una huella imborrable en nuestra formación académica y personal.

Con gratitud,

Los Autores

ISBN: 978-631-6557-41-4

PRÓLOGO

Este texto se ha preparado con el fin de brindar a los estudiantes que cursan Métodos Numéricos una guía fácil para el aprendizaje, que sirva además de consulta para repasar todos los contenidos del curso en forma clara y pormenorizada.

En todos los libros de métodos Numéricos existentes, se exponen los temas y en el momento de resolver problemas los resultados se presentan tabulados siendo muy difícil su interpretación, en este texto se explica paso a paso su solución, lo que hace fácilmente entendible cada uno de los temas tratados en el mismo.

Con la experiencia asimilada en estos años, se ha preparado esta segunda edición incluyendo temas que no fueron tratados en la primera. En el capítulo 2, se incluyen nuevos temas como el método de Muller y Baristow que permite obtener raíces reales e imaginarias y métodos para la obtención de raíces múltiples. En el capítulo 3, el algoritmo de Thomas para resolver sistemas tridiagonales, métodos para obtener raíces múltiples y otros ejercicios adicionales. En el capítulo 4, se ha preparado una nueva versión de la interpolación segmentaria cúbica. En el capítulo 5, nuevas formas de cuadratura Gaussiana para la integración de ciertas funciones específicas y en el capítulo 6, el método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores en la frontera lineales y no lineales. En este mismo capítulo, se incluyen un estudio acerca de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas y su aplicación para la modelación de cuerdas y membranas en vibración.

Al final de cada capítulo se han incluido nuevos ejercicios, y se resuelven casos prácticos con el fin de mostrar la utilidad de los métodos numéricos en el campo de la ingeniería, lo que sin lugar a duda motivará su aprendizaje.

Los métodos numéricos constituyen una herramienta importante que ha permitido el desarrollo de la ciencia y tecnología, porque permite la resolución de problemas complejos que se presentan en el campo del conocimiento, que no pueden ser resueltos mediante métodos analíticos. La exactitud de sus resultados depende de la metodología aplicada y son comparables a los resultados de los métodos analíticos.

ISBN: 978-631-6557-41-4

CAPITULO 1.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 MÉTODOS NUMÉRICOS: CONCEPTOS

Son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas. Aunque hay muchos tipos de métodos numéricos, todos comparten una característica común: Invariablemente los métodos numéricos llevan a cabo un buen número de tediosos cálculos aritméticos, no es raro que con el desarrollo de las computadoras cada vez más eficientes y rápidas, el papel de los métodos numéricos en la solución de los problemas de ingeniería haya aumentado considerablemente en los últimos años. (Rodríguez Ojeda, 2016)

El objetivo de los métodos numéricos es encontrar soluciones aproximadas a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de aritmética. En pocas palabras, se trata sencillamente de resolver problemas difíciles mediante muchos pasos fáciles.

Los métodos que vamos a estudiar permitirán simplificar los procedimientos matemáticos de manera que se pueda utilizar una computadora o una calculadora, para obtener resultados.

Los métodos numéricos combinan dos de las herramientas más importantes en el campo de la ingeniería: las matemáticas y las computadoras. Entonces los métodos numéricos se pueden definir también como las matemáticas por computadora.(Nieves Hurtado, 2015)

1.2 CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

De manera general los métodos o análisis numéricos puede entenderse como la rama de las matemáticas orientada hacia la búsqueda de algoritmos que permitan su tratamiento por computadora. (Escalante, 2022)

Se denominan algoritmos a los métodos numéricos de cálculo. En otras palabras, los algoritmos son procedimientos matemáticos que nos indican la serie de pasos y decisiones que se va a tomar para la solución de un problema. (Nakamura, 2000)

Un algoritmo debe ser:

- Finito: siempre debe terminar en un número determinado de pasos.
- Definido: las acciones deben definirse sin ambigüedad
- Entrada: puede tener una o varias entradas
- Salida: debe tener una o más salidas.

ISBN: 978-631-6557-41-4

- Efectivo: todas las operaciones deben ser lo suficientemente básicas para que puedan hacerse exactamente en un determinado tiempo, no mayor que el que tome una persona empleando papel y lápiz.

El diseño de los algoritmos es el paso previo al proceso de desarrollar programas para una computadora. Un programa es simplemente un conjunto de instrucciones para la computadora. Todos los programas que se necesitan correr en una computadora particular, en conjunto se le llama software.(Chapra & Canale, 2015)

Las razones por las cuales se deben estudiar los métodos numéricos son las siguientes:

1. Porque los métodos numéricos son herramientas extremadamente poderosas para la solución de problemas. Son capaces de manejar sistemas de ecuaciones grandes, no linealidades y geometrías complicadas que son comunes en la práctica de la Ingeniería y que, a menudo, son imposibles de resolver analíticamente.

2. En el transcurso de la carrera de la Ingeniería Mecánica podrán usar software disponible comercialmente que contiene métodos numéricos. Por ejemplo, COSMOS, SAP, etc.

3. Hay muchos problemas que no pueden plantearse al emplear programas existentes. Pero si se tiene conocimientos de métodos numéricos y de programación, es posible diseñar programas propios para resolver problemas particulares.

4. Los métodos numéricos son una herramienta importante para aprender a servirse de las computadoras personales.

5. Los métodos numéricos son un medio para reforzar la comprensión de las matemáticas.

Los métodos numéricos dan resultados aproximados, ya que cada cantidad se calcula solamente con un cierto número de cifras significativas. Para las aplicaciones esto es suficiente, puesto que conocer el valor exacto de una cantidad suele ser innecesario. En cuestiones técnicas, por ejemplo, la cantidad buscada sirve normalmente para determinar las dimensiones u otros parámetros de un artículo manufacturado. Todo proceso de fabricación es siempre aproximado, por lo que los cálculos técnicos cuya exactitud sobrepasa las tolerancias permitidas, evidentemente carecerán de valor.

Los métodos numéricos pueden facilitar la solución de problemas en ingeniería mediante el desarrollo de modelos matemáticos de un proceso físico determinado y se resuelve con un método numérico sencillo.

Un modelo matemático puede definirse, como una formulación o ecuación que expresa las características fundamentales de un sistema o proceso físico en términos matemáticos. Los modelos se clasifican desde simples relaciones algebraicas hasta grandes y complicados sistemas de ecuaciones diferenciales.

1.3 APLICACIÓN DE LA COMPUTADORA A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

La computadora es una herramienta útil en la solución de problemas, aunque es necesario mencionar que solamente ejecuta una serie de instrucciones y no resuelve problemas por sí sola. Se necesita especificar una serie de instrucciones para la solución de estos problemas.

ISBN: 978-631-6557-41-4

En el proceso de solución de un problema por medio de una computadora se requieren los pasos siguientes:

1. **Especificación del problema**. Es la identificación perfecta del problema y sus limitaciones, las variables que intervienen y los resultados deseados.

2. **Análisis**. Es la formulación de la solución del problema, denominada también algoritmo, de manera que se tenga una serie de pasos aritméticos que resuelvan el problema y que sean susceptibles de ejecutarse con la computadora.

3. **Programación**. Este paso consiste en traducir el método de análisis o algoritmo de solución, expresándolo como una serie detallada de operaciones.

   La programación se considera dividida en dos partes: en la primera la sucesión de operaciones se presenta en forma gráfica en un diagrama de bloques o diagrama de flujo, que permite dar una idea gráfica precisa de lo que se desea hacer, y en la segunda parte, que se denomina codificación, el diagrama anterior se traduce a un lenguaje de programación accesible a la máquina. (Scheid et al., 1991)

4. **Verificación**. Es la prueba exhaustiva del programa para eliminar todos los errores que tenga, de manera que efectúe lo que se desea. Los resultados de prueba se comparan con soluciones conocidas de problemas ya resueltos para detectar cualquier posible error.

   Los errores que se pueden detectar en una verificación son:

   a. **De sintaxis**. Son aquellos errores que impiden que corra un programa
   b. **Lógicos.** Son aquellos que a pesar de que un programa corre no proporcionan resultados reales

5. **Documentación**. Consiste en preparar un instructivo del programa, de manera que cualquier otra persona pueda conocer y utilizar el programa.

6. **Producción**. Es la última etapa en la que sólo se proporcionan datos de entrada del programa, obteniéndose las soluciones correspondientes.

De lo antes expuesto se puede concluir que es necesario un conocimiento completo del problema y de los campos de las matemáticas relacionadas con él, que es precisamente el objeto de los métodos numéricos para computadoras.

La adecuada selección del método de análisis es muy importante en la solución de problemas recurriendo al uso de computadoras.

1.4 NÚMEROS EXACTOS Y APROXIMADOS

En el proceso de resolución de un problema nos vemos obligados a tratar diferentes números que pueden ser exactos o aproximados. Los números exactos representan el valor verdadero del número, los aproximados un valor próximo al verdadero con la particularidad de que el grado de proximidad se determina por el error de cálculo.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Por ejemplo, en las afirmaciones "el cubo tiene 6 caras", "en la mano hay 5 dedos", "la semana tiene 7 días", "en la clase hay 32 alumnos", en el libro hay 582 páginas" los números 6, 5, 7, 32 y 582 son números exactos.

En las afirmaciones "la anchura de la casa es de 14.25 m", el radio de la tierra es igual a 6000 Km", "la masa de una caja de cerillas es de 10 gramos" los números 14.25; 6000 y 10 son números aproximados. Esto está relacionado, ante todo, con la precisión de los instrumentos (medios) de medida que utilizamos y de la capacidad visual del observador. No existen aparatos de medida absolutamente exactos, cada uno tiene su precisión, o sea, admite cierto error en las mediciones.

En otros casos un mismo número puede ser tanto exacto como aproximado. Así, por ejemplo, el número 3 es exacto si se trata del número de lados de un triángulo y es aproximado si se utiliza en vez del símbolo π al calcular el área del círculo con la ayuda de la formula $A = \pi R^2$.

Un número aproximado **a** es un número tal que difiere ligeramente de un número exacto **A** y se utiliza en los cálculos en lugar de este último. Si se sabe que $a < A$, se dice que a es una aproximación por defecto (más pequeña) de A; si $a > A$, se dice entonces que a es una aproximación por exceso (mayor) de A.

Por ejemplo, para $\sqrt{2}$ el número 1.41 es una aproximación por defecto, mientras que el 1.42 lo es por exceso, ya que $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$. Si a es un valor aproximado del número A, se escribe $a \approx A$.

1.5 REDONDEO DE LOS NÚMEROS

En la práctica de métodos numéricos surge a menudo la necesidad de redondear un número, o sea, reemplazarlo con otro que tiene una menor cantidad de cifras. En este caso se conservan una o más cifras, contando de la izquierda a la derecha, y se omiten todas las sucesivas.

Las reglas de redondeo más usadas son las siguientes.

1. El último dígito que se conserva o retiene se aumenta en una unidad si el primer dígito descartado es mayor que 5. Si el primer dígito descartado es menor que 5, se deja igual.

2. Si el primer dígito descartado es 5 o es 5 seguido de ceros, entonces el último dígito retenido se incrementa en una unidad si es impar, y si es par se deja tal como está.

   Ejemplo: Redondear los números siguientes: $A_1 = 12{,}7852$; $A_2 = 394{,}261$; $A_3 = 6{,}265001$; $A_4 = 147{,}5$; $A_5 = 148{,}5$ hasta tres cifras.

   Siguiendo la primera regla de redondeo, se obtiene $a_1 = 12{,}8$; $a_2 = 394$; $a_3 = 6.27$
   Según la segunda regla de redondeo, se obtiene $a_4 = 148$; $a_5 = 148$

   En algunos casos, que actualmente tienen cada vez mayor aplicación, se utiliza una regla de redondeo más simple (corte o truncamiento). Esta regla consiste en omitir todas las cifras comenzando con cierto orden (posición). Utilizando esta regla, se obtendría los siguientes

ISBN: 978-631-6557-41-4

valores de los números del ejemplo considerado: a_1 = 12,7; a_2 = 394; a_3 = 6.26 ; a_4 =147; a_5 =148

1.6 ERROR ABSOLUTO Y RELATIVO

Sea **A** un número exacto y **a**, su valor aproximado. La diferencia entre el número exacto A y su valor aproximado **a** se llama error.

$$\Delta a = A - a \qquad (1.1)$$

Si A > a, entonces el error es positivo: Δa > 0; por el contrario, si A < a, el error es entonces negativo: Δa < 0. Para obtener el número exacto A, añádase el error Δa al número aproximado a:

$$A = a \pm \Delta a \qquad (1.2)$$

En muchos casos, el signo del error es desconocido. Resulta entonces aconsejable utilizar el error absoluto del número aproximado.

$$\Delta = |\Delta a| \qquad (1.3)$$

El **error absoluto** de un número aproximado **a** es la magnitud Δa que satisface la desigualdad

$$\Delta a \geq |A - a| \qquad (1.4)$$

El error absoluto es la cota superior de desviación de número exacto **A** respecto al aproximado **a**:

$$a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a \qquad (1.5)$$

La desigualdad (1.5) se escribe frecuentemente en la forma siguiente:

$$A = a \pm \Delta a \qquad (1.6)$$

En calidad de error absoluto se toma, en la medida de lo posible, el número mínimo.

Ejemplo. Determínese la cota del error absoluto del número a = 3,14 utilizado en lugar del número π.

Solución. Como se tiene la desigualdad 3,14 < π <3,15 se deduce que $|a - \pi| < 0{,}01$ y, por tanto se puede tomar Δa =0,01.

Partiendo del hecho de que 3,14 <π <3,142 se tiene una mejor aproximación: Δa = 0,002. Para fines prácticos es conveniente tomar el número más pequeño de Δa que satisfaga la desigualdad (1.4).

ISBN: 978-631-6557-41-4

El error absoluto (o cota de error) no es suficiente para definir la exactitud de una medida o un cálculo. Con el fin de estimar la calidad de los cálculos realizados o las mediciones respectivas, se introduce el concepto de error relativo.

Se llama **error relativo** de un número aproximado **a** la magnitud **δa** que satisface la desigualdad:

$$\partial a \geq \left| \frac{A-a}{a} \right|, \quad a \neq 0 \qquad (1.7)$$

En particular, por error relativo se puede tomar

$$\partial a \approx \frac{\Delta a}{|a|}, \quad a \neq 0 \qquad (1.8)$$

y la relación (1.7) puede ser representada en la forma

$$A = a(1 \pm \partial a) \qquad (1.9)$$

Se puede notar que el error relativo es un número abstracto y se expresa, a veces, en tanto por ciento

Ejemplo. El peso de 1 dm^3 de agua a 0 º C viene dado por p = 999,847 gf ± 0,001 gf (gf = gramo fuerza). Determínese la cota del error relativo del resultado del peso del agua.

Solución. Evidentemente se tiene Δp = 0,001 gf y p ≤ 999,846 gf

En consecuencia

$$\delta p = \frac{0.001}{999.846} \approx 10^{-4}\ \%$$

1.7 CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Los errores encontrados en problemas matemáticos pueden, fundamentalmente dividirse en cinco grupos.

1. **Errores del problema.** Son errores implicados en el planteamiento del problema. El planteamiento matemático raramente ofrece una representación exacta de los fenómenos reales. En la mayoría de los casos son sólo modelos idealizados. Al estudiar los fenómenos de la naturaleza nos vemos forzados, por regla general, a aceptar ciertas condiciones que simplifican el problema.

   Ejemplo: Si se quiere simular el proceso de soldadura láser y se considera la energía absorbida por la pieza soldada, pero se desprecia la energía que se refleja y la energía absorbida por el plasma, se comete un error del problema.

2. **Errores numéricos**. Son errores que se generan con el uso de aproximaciones para representar las operaciones y cantidades matemáticas. Estos incluyen los errores de truncamiento, que resultan de representar aproximadamente un procedimiento matemático

ISBN: 978-631-6557-41-4

exacto, y los errores de redondeo, que resultan de representar aproximadamente números exactos.

a. Error de truncamiento. Es el que ocurre por ejemplo cuando una calculadora poco sofisticada sólo toma en cuenta los dígitos que cabe en la pantalla y no se analiza el primer dígito perdido.

b. Error de redondeo. El usar como $\pi = 3{,}1416$ omitiendo los términos restantes se genera un error de redondeo. Al usar en lugar de $1/3 = 0{,}333$ se comete También un error de redondeo.

3. **Errores iniciales**. Son los errores debidos a parámetros numéricos (en fórmulas) cuyos valores pueden sólo determinarse aproximadamente. Tales como, por ejemplo, todas las constantes físicas.

4. **Errores de operación.** Errores debido a las operaciones que envuelven números aproximados. Cuando se realizan cálculos con números aproximados, se llevan naturalmente los errores iniciales al resultado final. En este caso, los errores de operación son inherentes.

5. **Error residual**. Estos errores se originan por la presencia de procesos infinitos en análisis matemático. Las funciones expresadas en fórmulas matemáticas se especifican con frecuencia en forma de secuencias infinitas o series (sen x usando series). Aún más, pueden resolverse muchas ecuaciones matemáticas escribiendo únicamente un proceso infinito cuyos límites son las soluciones deseadas.

Un aspecto importante en el estudio de errores es lo referente a su propagación, es decir, poder estimar el error en el resultado debido al efecto de los errores en los operandos, así como la manera de reducir esta propagación de errores.

1.8 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Se llaman **cifras significativas** de un número todas sus cifras, a excepción de los ceros, puestos a la izquierda de la primera cifra distinta de cero. El concepto de cifras o dígitos significativos se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico.

Los ceros puestos al fin de un número son cifras significativas (en el caso contrario no se escriben).

Ejemplo. Los números 0,001604 y 30,500 tienen, respectivamente, 4 y 5 cifras significativas.

Los ceros no siempre son cifras significativas ya que pueden usarse sólo para ubicar el punto decimal. Los números 0,00001845; 0,0001845 y 0,001845 tienen cuatro cifras significativas.

Una cifra α_n de un número aproximado **a** se llama cifra significativa exacta siempre que se cumpla la siguiente desigualdad

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$|A-a| \quad \leq \quad 0.5x10^{m-n+1} \qquad (1.10)$$

o sea siempre que el valor absoluto de la diferencia entre el número exacto y su valor aproximado no sobrepase la mitad de la unidad del orden decimal en que esta α_n. Puesto que de ordinario en vez de $|A-a|$ se considera el error absoluto Δa, la desigualdad anterior se reemplaza a menudo por la siguiente:

$$\Delta a \quad \leq \quad 0.5x10^{m-n+1} \qquad (1.11)$$

Por otro lado, si se da un número de n cifras exactas del número aproximado **a**, por valor absoluto se puede tomar

$$\Delta a \quad = \quad 0.5x10^{m-n+1} \qquad (1.12)$$

Si estas desigualdades no se cumplen, la cifra α_n se llama dudosa o no significativa.

1.9 ERRORES DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA

Consideremos los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sus valores aproximados $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Sean $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, la suma de todos los números exactos y $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, suma de sus valores aproximados.

Si se conocen los errores absolutos $\Delta a_1, \Delta a_2, \ldots, \Delta a_n$ de todos los números aproximados, para estimar el error absoluto de su suma **a**. Se plantea la diferencia

$$A-a = (A_1-a_1)+(A_2-a_2)+\ldots+(A_n-a_n)$$

Pasando a los valores absolutos de los miembros segundo y primero de esta relación y utilizando la propiedad de los valores absolutos, se tiene

$$|A-a| \leq |A_1-a_1| + |A_2-a_2| + \ldots + |A_n-a_n|$$

Por lo tanto,

$$|A-a| \leq \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n \qquad (1.13)$$

y por error absoluto del número aproximado **a**, o sea, de la suma de los números aproximados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se puede tomar la suma de los errores absolutos de los sumandos:

$$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n \qquad (1.14)$$

De la última fórmula se deduce que, hablando en general, el error absoluto de la suma algebraica no debe ser menor que el error absoluto del menos exacto entre los sumandos, es

ISBN: 978-631-6557-41-4

decir del término que tenga el máximo error absoluto. En consecuencia, por muy grande que sea el grado de exactitud de los otros términos, no se puede con ellos aumentar la exactitud de la suma.

Al adicionar los números de exactitud absoluta distinta se suele proceder del modo siguiente:

1. Se separa el número (o números) de la exactitud mínima (es decir, el número que tiene el error absoluto máximo);

2. Se redondean números exactos de modo que en ellos se conserve una cifra más que en el número separado (es decir, se deja una cifra de reserva);

3. Se efectúa la adición, teniendo en cuenta todas las cifras conservadas;

4. El resultado obtenido se redondea suprimiendo una cifra.

Observación. Si hay una gran cantidad de sumandos (n > 10), la estimación del error absoluto de la suma realizada con ayuda de la fórmula (1.14) resulta fuertemente aumentada, ya que de ordinario ocurre una compensación parcial de errores de signos opuestos. Si todos los sumandos están redondeados hasta el m-ésimo orden decimal, o sea, sus errores se evalúan por la magnitud 0.5×10^{-m}, la estimación estadística del error absoluto de la suma se calcula por la siguiente fórmula:

$$\Delta a = \sqrt{n}.0.5x10^{-m} \qquad (1.15)$$

Ejemplo1. Adicionar los números aproximados:

$a = 0.1732 + 17.45 + 0.000333 + 204.4 + 7.25 + 144.2 + 0.0112 + 0.634 + 0.0771$ cada uno de los cuales tiene como exactas todas las cifras escritas.

Solución. Se eligen los números de la mínima exactitud (de máximo error absoluto). Tales números son: 204.4 y 144.2. El error de cada uno de ellos constituye 0.05. Se redondean los demás números, dejando una cifra (de reserva) más y se suman todos los números:

$$a = 0.17 + 17.45 + 0.00 + 204.4 + 7.25 + 144.2 + 0.01 + 0.63 + 0.08 = 374.19$$

Se redondea la suma obtenida, suprimiendo una cifra: 374. 2. Se evalúa la exactitud del resultado. El error absoluto de la suma se compone de dos sumandos:

1. Del error inicial, o sea, de la suma de los errores de los números menos exactos y de los errores de redondeo de los demás números: 0.05 (2) + 0.005 (7) ≈ 0.14;
2. Del error de redondeo del resultado: 0,01.

Ahora bien, el error absoluto de la suma es 0,15 y el resultado se escribe en la forma A = 374,2 ± 0,15. Es posible también expresar en la forma: A = 374,2 ± 0,2.

ISBN: 978-631-6557-41-4

De un modo análogo se procede también en el caso en que uno o varios números aproximados son negativos.

Ejemplo 2. Hallar la diferencia de los números aproximados $a = a_1 - a_2$ y estimar el error absoluto y relativo del resultado si $A_1 = 17{,}5 \pm 0{,}02$, $A_2 = 45{,}6 \pm 0{,}03$.

Solución. Se calcula $a = a_1 - a_2 = 17{,}5 - 45{,}6 = -28{,}1$;
$\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2 = 0{,}02 + 0{,}03 = 0{,}05$.
Se determina el error relativo: $\delta a = 0{,}05/|-28{,}1| \approx 0{,}02 \approx 0{,}2$ %.

Al sustraer números próximos aparece con frecuencia la situación llamada pérdida de exactitud. Sea $x > 0$, $y > 0$ y $a = x - y$; entonces

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x - y|} \qquad (1.16)$$

Ahora bien, si los números **x** e **y** se distinguen poco uno de otro, entonces, incluso al ser pequeños los errores Δx y Δy, la magnitud del error relativo de la diferencia puede resultar considerable.

Ejemplo 3. Sea $x = 5{,}125$, $y = 5{,}135$; aquí $\Delta x = 0{,}0005$, $\Delta y = 0{,}0005$, $\delta x \approx \delta y \approx 0{,}01$ %. El error relativo de la diferencia $a = x - y$ constituye

$$\delta a = \frac{0.0005 + 0.0005}{0.01} x100 = 10\ \%$$

Es evidente que como resultado de la sustracción de dos números próximos puede tener lugar gran pérdida de exactitud. Para evitar esto, es necesario procurar que el esquema de cálculo se transforme de un modo tal que las pequeñas diferencias de las magnitudes se calculen inmediatamente.

Ejemplo 4. Hallar la diferencia $A = \sqrt{6.27} - \sqrt{6.26}$, y estimar el error relativo del resultado.

Solución. Sea

$$A_1 = \sqrt{6.27} \approx 2.504; \quad \Delta a_1 = 0.0005; \quad A_2 = \sqrt{6.26} \approx 2.502; \quad \Delta a_2 = 0.0005.$$

Entonces $a = 2.504 - 2.502 = 0.2 \text{ x } 10^{-2}$; $\Delta a = 0.0005 + 0.0005 = 0.001$, de donde

$$\delta a = \frac{0.1x10^{-2}}{0.2x10^{-2}} = 0.5 = 50\ \%$$

Cambiando el esquema de cálculo se puede obtener una estimación mucho mejor del error relativo:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$A = \sqrt{6.27} - \sqrt{6.26} = \frac{\left(\sqrt{6.27} - \sqrt{6.26}\right)\left(\sqrt{6.27} + \sqrt{6.26}\right)}{\sqrt{6.27} + \sqrt{6.26}}$$

$$A = \frac{6.27 - 6.26}{\sqrt{6.27} + \sqrt{6.26}} = \frac{0.01}{\sqrt{6.27} + \sqrt{6.26}} \approx 0.2\,x10^{-2} = a;$$

$$\delta a = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2}{a_1 + a_2} = \frac{0.001}{5.006} = 0.2\,x10^{-3} = 0.02\ \%$$

Ahora bien, al calcular con las mismas cuatro cifras justas de a_1 y a_2 se ha obtenido un resultado mucho mejor desde el punto de vista del error relativo.

1.10 ERRORES DEL PRODUCTO

Se tienen dos números exactos A_1 y A_2 y sus valores aproximados a_1 y a_2.

Sea $A = A_1.A_2$ y $a = a_1.a_2.$

Si se conocen los errores relativos δa_1 y δa_2, estimar el error relativo δa.

Se representan los valores exactos A_1 y A_2 en la forma.

$$A_1 = a_1 + \Delta_1 \qquad\qquad A_2 = a_2 + \Delta_2 \tag{1.17}$$

donde las incógnitas Δ_1 y Δ_2 satisfacen las desigualdades

$$|\Delta_1| \le |a_1|\,\delta a_1 \qquad\qquad |\Delta_2| \le |a_2|\,\delta a_2 \tag{1.18}$$

Multiplicando los miembros segundos y primeros de las relaciones (1.17), se obtiene

$$A_1 A_2 = a_1 a_2 + \Delta_1 a_2 + \Delta_2 a_1 + \Delta_1 \Delta_2$$

Si se pasa al primer miembro el producto a_1a_2 y utilizando las propiedades de los valores absolutos, se encuentra

$$|A_1 A_2 - a_1 a_2| \le |\Delta_2 a_1| + |\Delta_1 a_2| + |\Delta_1 \Delta_2| \tag{1.19}$$

Si se suprime el último sumando del segundo miembro en virtud de su pequeño valor y se divide los miembros segundo y primero de la desigualdad por $|a| = |a_1 a_2|$. Entonces, en vista de la relación (2.14), se tiene:

$$\left|\frac{A - a}{a}\right| \le \delta a_1 + \delta a_2 \tag{1.20}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

De la relación obtenida se deduce que por error relativo del producto $a = a_1.a_2$ se puede tomar la suma de errores relativos de los factores

$$\delta a = \delta a_1 + \delta a_2 \tag{1.21}$$

La desigualdad (1.20) se extiende fácilmente al producto de unos cuantos factores, así que si $A = A_1.A_2. . . A_n$ y $a = a_1.a_2. . . a_n$ se puede tomar que

$$\delta a = \delta a_1 + \delta a_2 + \ldots + \delta a_n \tag{1.22}$$

Para el producto de varias cifras, se puede proceder del modo siguiente:

1. Se separa el número con cantidad mínima de cifras significativas exactas;

2. Los factores retenidos se redondean de un modo tal que contengan una cifra significativa más que la cantidad de cifras significativas justas en el número separado;

3. Se conservan en el producto tantas cifras significativas cuantas cifras significativas exactas tiene el menos exacto de los factores (número separado).

Ejemplo 1. Hallar el producto de los números aproximados x_1 = 3,6 y x_2 = 84,489 todas las cifras de las cuales son exactas.

Solución. En el primer número hay dos cifras significativas exactas y en el segundo, cinco. Se redondea el segundo número hasta tres cifras significativas. Una vez realizado el redondeo, se tiene x_1 = 3,6 y x_2 = 84,5. De aquí

$$x = x_1.x_2 = (3.6)(84.5) = 304.20 \approx 3.0x10^2$$

En el resultado se conservan dos cifras significativas.

$$\delta x = \delta x_1 + \delta x_2 = \frac{0.05}{3.6} + \frac{0.05}{84.5} = 0.0146 \approx 0.015$$

$$\Delta a = |x|\, \delta x = (304.20)(0.0146) \approx 4$$

El producto X = 304 ± 4, de donde también se deduce que las cifras exactas son dos.

Ejemplo 2. Determinar el producto de los números aproximados x_1 = 12,4 y x_2 0 65,54 y el número de cifras exactas contenidas en el mismo.

Solución. En el primero de los números hay tres cifras significativas y en el segundo cuatro; se puede multiplicar los números sin redondearlos previamente; $x_1.x_2$ = (12,4) (65,54)= 812,696. Es necesario conservar tres cifras significativas, ya que el menos exacto de los factores tiene tanta cantidad de cifras significativas justas; ahora bien, a = 813.

Se calcula el error.

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\delta a = \delta x_1 + \delta x_2 = \frac{0.05}{12.4} + \frac{0.005}{65.54} = 0.0041$$

Entonces Δa = 813 (0,0041) ≈ 3,4. Por lo tanto, el producto tiene dos cifras exactas y puede expresarse como A = 813 ± 4.

1.11 ERRORES DEL COCIENTE

Se consideran los números exactos A_1 y A_2 y sus valores aproximados a_1 y a_2 con errores aproximados Δa_1, Δa_2.

El error relativo del valor aproximado del cociente es $a = a_1/a_2$ para el valor exacto $A = A_1/A_2$. Sea $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Se representan los valores exactos A_1 y A_2 en la forma

$$A_1 = a_1 + \Delta_1 \qquad A_2 = a_2 + \Delta_2 \qquad (1.23)$$

donde las incógnitas Δ_1 y Δ_2 satisfacen las desigualdades

$$|\Delta_1| \leq \Delta a_1 \qquad |\Delta_2| \leq \Delta a_2 \qquad (1.24)$$

Se considera ahora la diferencia entre el número exacto A y al aproximado a

$$A - a = \frac{a_1 + \Delta_1}{a_2 + \Delta_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2\,\Delta_1 - a_1\,\Delta_2}{a_2\left(a_2 + \Delta_2\right)}$$

Si se divide los miembros primero y segundo por a, se tiene:

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| = \left|\frac{a_2\,\Delta_1 - a_1\,\Delta_2}{a_1\left(a_2+\Delta_2\right)}\right| = \left|\frac{a_2}{a_2+\Delta_2}\right|\left|\frac{\Delta_1}{a_1} - \frac{\Delta_2}{a_2}\right|$$

Teniendo en cuenta que Δ_2 es pequeño en comparación con a_2, aproximadamente se puede decir que $a_2/(a_2+\Delta_2) \approx 1$. Entonces, utilizando las propiedades de los valores absolutos y las desigualdades (2), se obtiene

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| = \left|\frac{\Delta_1}{a_1} - \frac{\Delta_2}{a_2}\right| \leq \left|\frac{\Delta a_1}{|a_1|} + \frac{\Delta a_2}{|a_2|}\right| = \delta a_1 + \delta a_2$$

Ahora bien. Por error relativo del cociente $a = a_1/a_2$ se puede tomar la suma de errores relativos del dividendo y del divisor:

$$\delta a = \delta a_1 + \delta a_2 \qquad (1.25)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Al utilizar la fórmula (1.25) para la estimación del error relativo del cociente hacen la aportación principal en este error los números menos exactos (que tienen el máximo error relativo). Por eso para dividir los números de diferente error relativo se suele proceder del modo siguiente:

1. Se separa el número menos exacto, o sea, el número que tiene la cantidad mínima de cifras exactas;
2. Se redondea el segundo número, conservando una cifra significativa más que las que tiene el número separado;
3. En el cociente se conservan tantas cifras significativas cuantas las había en el número exacto menor.

Conociendo el error relativo del cociente, es fácil determinar su error absoluto con la ayuda de la fórmula

$$\Delta a = |a|\,\delta a = \left|\frac{a_1}{a_2}\right|\left(\delta a_1 + \delta a_2\right) \qquad (1.26)$$

Ejemplo 1. Calcular el cociente a = x/y de los números aproximados x = 5.735 e y = 1.23 si todas las cifras del dividendo y del divisor son exactas. Determinar los errores relativo y absoluto.

Solución. Primeramente se calcula el cociente. Puesto que el dividendo x = 5.735 contiene cuatro cifras significativas exactas y el divisor las contiene tres, se puede realizar la división sin previo redondeo; tenemos que a = 5.735/1.23 = 4.66. En el resultado se han conservado tres cifras significativas, puesto que el número exacto mínimo (divisor) contiene tres cifras significativas exactas.

Se calcula el error relativo del cociente, teniendo en cuenta que Δx = 0.0005; Δy = 0.005:

$$\delta a = \delta x + \delta y = \frac{0.0005}{5.735} + \frac{0.005}{1.23} = 0.00009 + 0.0041 = 0.0042 \approx 0.5\ \%$$

Se determina el error absoluto

$$\Delta a = |\,a\,|\,\delta a = 4.66\left(0.0042\right) = 0.02$$

El resultado final, teniendo en cuenta el error de redondeo del producto (0.005), se puede expresar como: A = 4.66 ± 0.03.

1.12 ERRORES DE LA POTENCIA Y DE LA RAÍZ

Se considera el número aproximado $\mathbf{a_1}$ que tiene el error relativo $\boldsymbol{\delta a_1}$. Si se requiere estimar el error relativo de la potencia $a = a_1^m$. Es evidente que

$$a = a_1^m = \underbrace{a_1\, a_1 \ldots\ldots a_1}_{\text{m factores}}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

El error relativo del producto es

$$\delta a = \delta a_1 + \underbrace{\delta a_1 + \ldots\ldots + \delta a_1 = m\,\delta a_1}_{\text{m sumandos}} \qquad (1.27)$$

Ahora bien, al elevar el número aproximado **a** a la potencia **m** el error relativo de este número aumenta **m** veces. En los cálculos prácticos al elevar a potencia un número aproximado como resultado se conservan tantas cifras significativas cuantas contenían en el mismo número aproximado.

Ejemplo 1. El lado del cuadrado a = 36.5 cm (con precisión hasta 1 mm). Hallar el área del cuadrado, los errores relativo y absoluto, así como la cantidad de cifras exactas del resultado.

Solución. Se calcula el área del cuadrado

$$S = a^2 = (36.5)^2 = 1332.25 \approx 1.33x10^3\ cm^2$$

Se determina luego el error relativo del área

$$\delta s = 2\delta a = 2\,\frac{0.1}{36.5} \approx 0.055 \approx 0.55\%$$

Se determina el error absoluto del área

$$\Delta s = S\,\delta s = 1.33x10^3\,(0.0055) \approx 7.4\ cm^2$$

La respuesta definitiva puede se puede representar como:

$$S = (1.33 \pm 0.01)x10^3\,cm^2$$

Ahora bien el resultado tiene dos cifras significativas exactas.

Si se considera que el número aproximado a_1 tiene el error relativo δa_1. Se puede mostrar que el error relativo del número $a = \sqrt[m]{a_1}$ es m veces menor que el error relativo del número a_1:

$$\delta a = \frac{1}{m}\,\delta a_1 \qquad (1.28)$$

En los problemas prácticos al extraer la raíz del número aproximado como resultado se conservan tantas cifras significativas cuantas contenía el número subradical.

Ejemplo 2. Determinar, con qué error relativo y con cuántas cifras significativas justas se puede hallar el lado del cuadrado si su área S = 16,45 cm^2 con precisión hasta 0,01

ISBN: 978-631-6557-41-4

Solución. Se tiene que $a = \sqrt{S} = 4.056\ cm$;

$$\delta a = \frac{1}{2}\delta s = \frac{1}{2}\left(\frac{0.01}{16.45}\right) = 0.0003 = 0.03\%$$

$$\Delta a = 4.056(0.0003) = 1.3x10^{-3}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el redondeo del resultado, A=4,056 ± 0,002 cm y la cantidad de cifras significativas exactas es igual a 3.

1.13 EJEMPLOS VARIOS SOBRE EL CÁLCULO DE ERRORES

Ejemplo 1. Calcular $X = \frac{A^3\sqrt{B}}{C^2}$, donde A = 7.45 ± 0.01, B = 50.46 ±0.02, C = 15.4 ± 0.03. Determinar el error del resultado.

Solución. Al calcular los resultados intermedios, se conserva una cifra de reserva, ósea, si según la regla general es necesario dejar n cifras significativas, entonces en los resultados intermedios se conservan n + 1 cifras.

$$a^3 = 413.5; \quad \sqrt{b} = 7.1035; \quad c^2 = 237.2; \quad x = \frac{(413.5)(7.1035)}{237.2} = 12.4$$

En el resultado se han dejado tres cifras significativas, ya que en los factores la cantidad de menores cifras significativas es igual a 3. Se procede calcular los errores del resultado:

$$\delta x = 3\delta a + \frac{1}{2}\delta b + 2\delta c = 3\frac{0.01}{7.45} + \frac{1}{2}.\frac{0.02}{50.46} + 2.\frac{0.03}{15.4} \approx 0.0041 + 0.0002 + 0.004 \approx 0.009$$

$$\Delta x = 12.4(0.009) \approx 0.12$$

Así pues, se obtiene la respuesta: X = 12.4 ± 0.2; δx = 0.9 %.

Ejemplo 2. Calcular $X = \frac{(A+B)M}{(C-D)^2}$, donde A = 2.754 ± 0.001; B = 11.7 ± 0.04; M = 0.56 ± 0.05; C = 10.536 ± 0.002; D = 6.32 ± 0.008. Determinar los errores del resultado.

Solución. Se determina a + b = 2,75 + 11,7 = 14,45

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\Delta_{a+b} = \Delta a + \Delta b + \Delta_{red} = 0.001 + 0.04 + 0.004 = 0.045$$

$$c - d = 10{,}536\text{-}6{,}32 = 4{,}216;\ \Delta_{c-d} = 0.002 + 0.008 = 0.010$$

Por eso

$$x = \left(\frac{14.45(0.56)}{(4.216)^2}\right) = \left(\frac{14.45(0.56)}{17.77}\right) = 0.455 \approx 0.46 = 4.6x10^{-1}$$

$$x = \frac{0.045}{14.45} + \frac{0.005}{0.56} + 2\frac{0.01}{4.216} = 0.00311 + 0.00894 + 0.00474 = 0.02 = 2\ \%$$

Por consiguiente,

$$\Delta x = 0.46(0.02) = 0.01$$

Así pues, se obtiene la respuesta: X = 0,46 ± 0,01; δx = 2 %.

Ejemplo 3. Calcular la siguiente expresión $x = \frac{A^2\sqrt{B}C^3 + \sqrt[4]{D}E^2\sqrt[3]{F}}{G^2\sqrt[3]{H}I^3 + \sqrt[5]{J}K^2\sqrt[3]{L}}$ donde:

A = 15,631 ± 0,001; B = 326,836 ± 0,002: C = 6,524 ± 0,001; D = 375,276 ± 0,003; E = 42,487 ± 0,002; F = 259,748 ± 0,002; G = 4,365 ± 0,001; H = 37,428 ± 0,001; I = 3,534 ± 0,002; J = 125,213 ± 0,003; K = 4,932 ± 0,001; L = 96,132 ± 0,002.

Solución.

Se realizan en forma secuencial las operaciones parciales

$A^2 = (15{,}631)^2 = 244{,}328161$ $\qquad \sqrt{B} = \sqrt{326{,}836} = 18{,}078606$

$C^3 = (6{,}524)^3 = 277{,}678246$ $\qquad \sqrt[4]{D} = \sqrt[4]{375{,}276} = 4{,}401368$

$E^2 = (42{,}487)^2 = 1805{,}145169$ $\qquad \sqrt[3]{F} = \sqrt[3]{259{,}748} = 6{,}3804416$

$G^2 = (4{,}365)^2 = 19{,}053225$ $\qquad \sqrt[3]{H} = \sqrt[3]{37{,}428} = 3{,}3450212$

$I^3 = (3{,}534)^3 = 44{,}136677$ $\qquad \sqrt[5]{J} = \sqrt[5]{125{,}213} = 2{,}6274223$

$K^2 = (4{,}932)^2 = 24{,}324624$ $\qquad \sqrt[3]{L} = \sqrt[3]{96{,}132} = 4{,}5809546$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x=\frac{(244{,}328161)(18{,}078606)(277{,}678246)+(4{,}401368)(1805{,}145169)(6{,}3804416)}{(19{,}053225)(3{,}3450212)(44{,}136677)+(2{,}6274223)(24{,}324624)(4{,}5809546)}$$

$$x=\frac{1226536{,}067+50693{,}29876}{2812{,}98232+292{,}77366}=\frac{1277229{,}366}{3105{,}75598}411{,}24588$$

Se realiza el cálculo de los errores considerando las reglas explicadas anteriormente

$$\delta_{ABC}=\frac{2(0{,}001)}{15{,}631}+\frac{1}{2}\frac{(0{,}002)}{(326{,}836)}+\frac{3(0{,}001)}{6{,}524}=0{,}00059085$$

$$\Delta_{ABC}=(0{,}00059085)(1226536{,}067)=724{,}69883$$

$$\delta_{DEF}=\frac{1}{4}\frac{(0{,}003)}{(375{,}276)}+\frac{2(0{,}002)}{(42{,}487)}+\frac{1}{3}\frac{(0{,}002)}{(259{,}748)}=0{,}00009871$$

$$\Delta_{DEF}=(0{,}00009871)(50693{,}29876)=5{,}003935$$

$$\Delta_{ABCDEF}=724{,}69883+5{,}003935=729{,}702765$$

$$\delta_{ABCDEF}=\frac{729{,}702765}{1277229{,}366}=0{,}000571317$$

$$\delta_{GHI}=\frac{2(0{,}001)}{4{,}365}+\frac{1}{3}\frac{(0{,}001)}{(37{,}428)}+\frac{3(0{,}002)}{3{,}534}=0{,}002164889$$

$$\Delta_{GHI}=(0{,}002164889)(2812{,}98232)=6{,}089794$$

$$\delta_{JKL}=\frac{1}{5}\frac{(0{,}003)}{(125{,}213)}+\frac{2(0{,}001)}{(4{,}932)}+\frac{1}{3}\frac{(0{,}002)}{(96{,}132)}=0{,}000417242$$

$$\Delta_{JKL}=(0{,}000417242)(292{,}77366)=0{,}122157$$

$$\Delta_{GHIJKL}=6{,}089794+0{,}122157=6{,}211951$$

$$\delta_{GHIJKL}=\frac{6{,}211951}{3105{,}75598}=0{,}0020001414$$

$$\delta_{ABCDEFGHIJKL}=0{,}000571317+0{,}0020001414=0{,}00257146$$

$$\Delta_{ABCDEFGHIJKL}=(0{,}00257146)(411{,}24588)=1{,}0575$$

$$x=411{,}2459\pm1{,}0575$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

ISBN: 978-631-6557-41-4

CAPITULO 2.

2. SOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES

2.1 INTRODUCCIÓN

En los problemas prácticos se necesita con frecuencia resolver las ecuaciones. Toda ecuación con una incógnita puede ser representada en la forma

$$\varphi(x) = g(x) \qquad (2.1)$$

donde $\varphi(x)$ y $g(x)$ son las funciones dadas, definidas sobre cierto conjunto numérico X llamado dominio de valores admisibles de la ecuación.

La ecuación con una incógnita puede escribirse en la forma

$$f(x) = 0 \qquad (2.2)$$

En efecto, transponiendo $g(x)$ al primer miembro de la ecuación (2.1), tenemos la ecuación $\varphi(x) - g(x) = 0$ equivalente a (2.1). Si designamos el primer miembro de la última ecuación con $f(x)$, obtenemos la ecuación (2.2).

El conjunto de los valores de la variable x con los cuales la ecuación (2.1) se transforma en identidad se llama solución de esta ecuación y cada valor de x de este conjunto se denomina raíz de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 2 - x$ tiene las raíces $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$. Sustituyendo - 2 y 1 en la ecuación dada en vez de x, obtenemos las identidades: $(-2)^2 = 2 - (-2)$, o sea $4 = 4$; $(1)^2 = 2 - 1$, o sea $1 = 1$.

Resolver una ecuación quiere decir hallar el conjunto de todas las raíces de esta ecuación. Este conjunto puede ser finito o infinito. Así, la ecuación recién considerada tiene dos raíces. La ecuación sen x = 0 tiene la solución $x = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Asignando a n distintos valores, obtenemos un conjunto infinito de raíces. (Luthe et al., 1988)

El conjunto de varias ecuaciones con varias incógnitas se llama sistema de ecuaciones. Se llama solución de un sistema de ecuaciones con varias incógnitas el conjunto de valores de estas incógnitas el cual convierte en identidad cada ecuación del sistema. Por ejemplo, el sistema

$$x^2 + y = 5,$$
$$x + y^2 = 3$$

tiene como solución x = 2, y = 1, ya que con estos valores de las incógnitas las ecuaciones del sistema se convierten en identidades:

$$(2)^2 + 1 = 5, \qquad 2 + (1)^2 = 3.$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar el conjunto de todas sus soluciones o mostrar que este sistema no tiene soluciones. La resolución de una ecuación con una incógnita consiste en la determinación de las raíces, o sea, los valores de x que convierten la ecuación en identidad. Las raíces de una ecuación pueden ser reales y no reales (complejas).

De todo el conjunto de las ecuaciones se destaca con frecuencia la clase de ecuaciones denominadas algebraicas que poseen varias particularidades características que se utilizan al resolverlas. Se denomina ecuación algebraica con una incógnita a la ecuación que tiene la forma

$$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (2.3)$$

Aquí **n** es el número positivo entero llamado grado de la ecuación. Los números a_o, a_1, . . ., a_n se denominan coeficientes de la ecuación, pueden ser tanto reales como complejos.

Las ecuaciones que contienen funciones trascendentes: función exponencial a^x , función logarítmica $\log_a x$, funciones trigonométricas sen x, cos x, tg x, ctg x, funciones trigonométricas inversas y otras se reúnen bajo el nombre de ecuaciones trascendentes las cuales junto con las ecuaciones algebraicas cuyo grado supera el primero suelen llamarse ecuaciones no lineales.

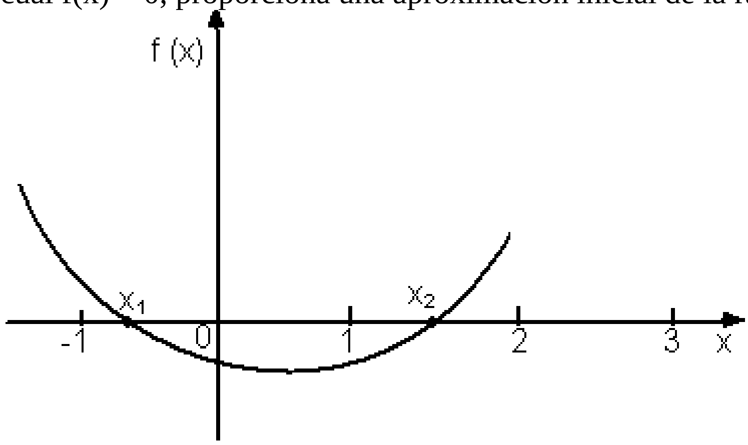
2.2 SEPARACIÓN DE RAÍCES.

El proceso de determinación de los valores aproximados de las raíces de ecuaciones se subdivide en dos etapas: 1) separación de las raíces, 2) determinación más exacta de las raíces hasta el grado prefijado de precisión.

La raíz ξ de la ecuación f (x) = 0 se considera separada sobre el segmento $[x_a, x_b]$ si en este segmento la ecuación f (x) = 0 y no tiene otras raíces. Separar las raíces quiere decir partir todo el dominio de los valores admisibles en segmentos en cada uno de los cuales existe una sola raíz.

2.2.1 Método Gráfico

Un método simple para obtener una aproximación a la raíz de la ecuación f(x) = 0 consiste en graficar la función y observar en donde cruza el eje x. Este punto, que representa el valor de x para el cual f(x) = 0, proporciona una aproximación inicial de la raíz (figura 2.1).



ISBN: 978-631-6557-41-4

Figura 2.1. Representación de la separación de raíces por el método gráfico

Las raíces se separan fácilmente si está construido el gráfico de la función y = f(x). Los puntos de intersección de la función con el eje Ox dan los valores de la raíz y por el gráfico no es difícil determinar dos números a y b entre los cuales está encerrada una sola raíz.

Ejemplo en la figura 2.1, se ve claramente que la función tiene dos raíces una negativa en x_1 entre [-1 y 0] y otra positiva en x_2 entre [1 a 2] .

Ejemplo 1. Determinar gráficamente entre qué números enteros están encerradas las raíces de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Solución.

Se construye el gráfico de la función $y = x^3 – 3x - 1$ (figura 2.2) y se determina los segmentos dentro de los cuales existen puntos de intersección de esta función con el eje Ox. La función corta el eje Ox en tres puntos; por lo tanto, la ecuación tiene tres raíces reales. Del dibujo se ve claramente que las raíces pertenecen a los segmentos [-2, -1], [-1,0], [1,2].

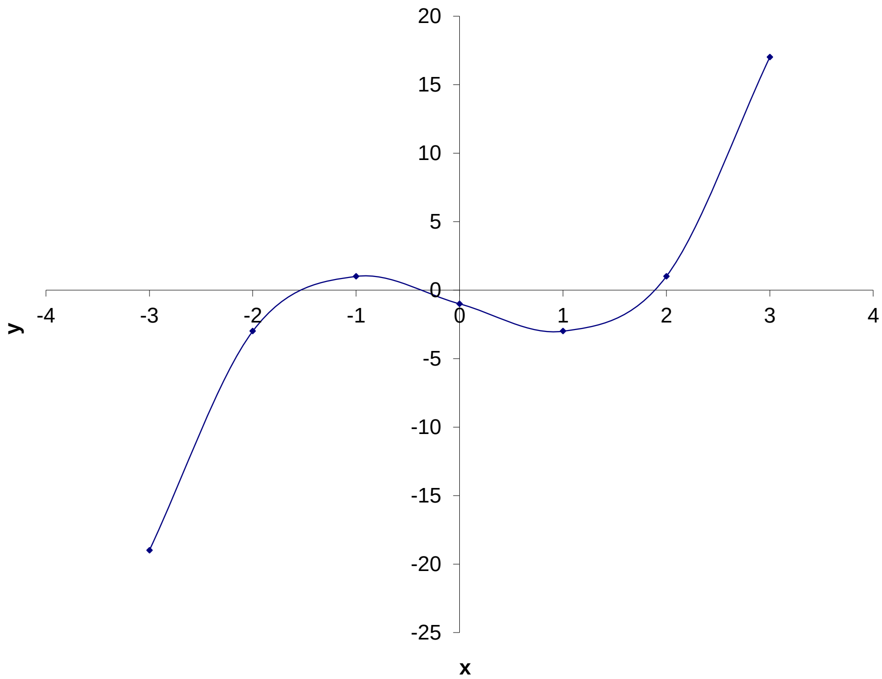


Figura 2.2. Ejemplificación del método gráfico

ISBN: 978-631-6557-41-4

2.2.2 Método Analítico

Analíticamente las raíces de la ecuación f (x) = 0 pueden ser separadas utilizando algunas propiedades de las funciones, propiedades que se estudian en el curso del análisis matemático.

Una función f (x) para la cual $\lim_{x \to a} f(x) = f(x_a)$ se llama función continua en $x = x_a$. De una función que es continua en todo punto de un intervalo $x_a \le x \le x_b$ se dice que es continua en ese intervalo.

Si la función f (x) es continua sobre el segmento $[x_a, x_b]$, entonces en este segmento siempre hay puntos en los cuales ella toma los valores máximos y mínimos. Por consiguiente, para determinar los valores máximo y mínimo de la función sobre el segmento es necesario:

- Determinar los puntos críticos de la función;
- Calcular los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del segmento [a, b];
- El mayor de los valores hallados en el paso dos, será el máximo de la función en el segmento y el menor será valor mínimo de la misma.

De acuerdo con lo expuesto se puede recomendar el siguiente procedimiento para el método analítico:

a. Se halla f ´(x), o sea, la primera derivada;
b. Se hace la tabla de signos de la función f (x) suponiendo x igual: a) a los valores críticos (raíces) de la derivada o a los valores próximos a estos últimos; b) a los valores de frontera (partiendo del dominio de los valores admisibles de la incógnita);
c. Se determinan los intervalos en cuyos extremos la función toman los valores de signos contrarios. Dentro de estos intervalos se contiene, cada vez, una y una sola raíz.

Ejemplo 1. Separar las raíces de la ecuación $2^x - 5x - 3 = 0$ con ayuda del método analítico.

Solución. Se designa $f(x) = 2^x - 5x - 3$. Se determina la primera derivada $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5$.

Se iguala a cero la primera derivada y se procede a calcular la raíz como se muestra

$$2^x \ln 2 - 5 = 0; \qquad 2^x \ln 2 = 5; \qquad 2^x = \frac{5}{\ln 2}$$

$$x \log 2 = \log 5 - \log \ln 2;$$

$$x = \frac{\log 5 - \log \ln 2}{\log 2} = \frac{0.6990 + 0.1592}{0.3010} = \frac{0.8582}{0.3010} = 2.85$$

El valor de x = 2.85 da una referencia y para tomar un rango para elaborar la tabla de signos tomamos este valor en ± 3 unidades, esto es desde aproximadamente – 1 a +5.

ISBN: 978-631-6557-41-4

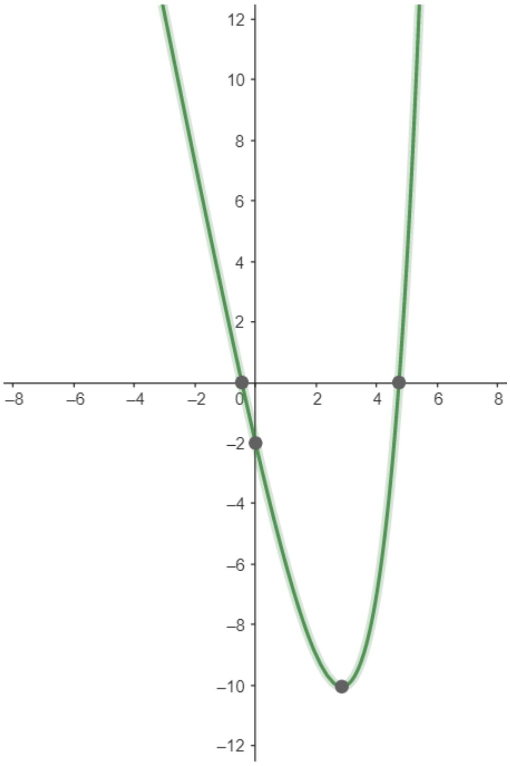


Figura: Representacion de la grafica f (x) = 2^x - 5x - 3

Tabla 2.1

x	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	2.5	-2	-6	-9	-10	-7	4
signo	+	-	-	-	-	-	+

La ecuación tiene dos raíces, ya que ocurren dos cambios de signo de la función. Las raíces de la ecuación están encerradas en los intervalos (-1,0) y (4,5).

Ejemplo 2. Separar las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

Solución. Se determina la primera derivada f ' (x) = $3x^2$- 6.

Se iguala a cero esta derivada y se calcula la raíz:

$3x^2 - 6 = 0;$ $3x^2 = 6;$ $x^2 = 2;$ $x = 1.41$

Se elabora la tabla de los signos de la función f (x) con la recomendación dada anteriormente

Tabla 2.2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-7	6	7	2	-3	-2	11
signo	-	+	+	+	-	-	+

ISBN: 978-631-6557-41-4

Por lo tanto, la ecuación planteada tiene dos raíces reales dentro de los intervalos (-3, -2), (0, 1) y (2, 3)

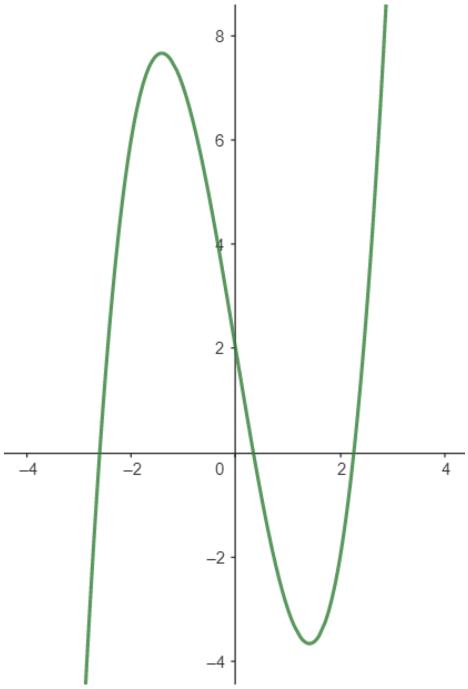


Figura: Representacion de la grafica $f(x) = x^3 - 6x + 2$

2.3 MÉTODO DE LA BISECCIÓN

Supongamos que se da la ecuación f (x) = 0, donde f (x) es la función continua. Se necesita hallar la raíz ξ de esta ecuación con la exactitud ε , donde ε es cierto número positivo suficientemente pequeño próximo a cero. (Agud, 2020)

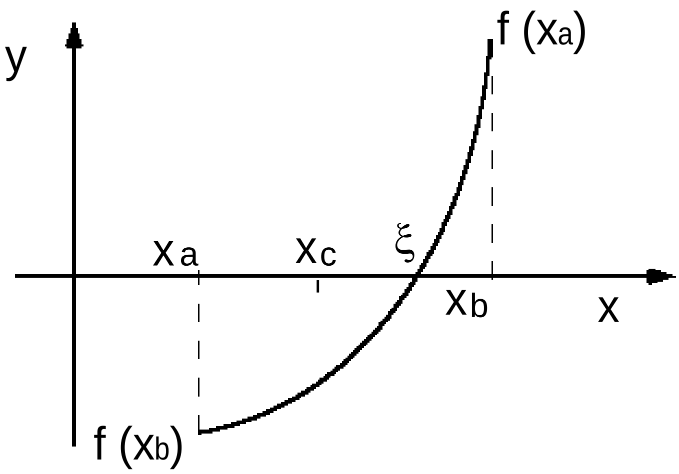


Figura 2.3. Representación del método de la bisección

ISBN: 978-631-6557-41-4

En general, si f (x) es real y continua en el intervalo de x_a hasta x_b y f (x_a) y f (x_b) tienen signos opuestos, estos son,

$$f(a) * f(b) < 0$$

entonces hay, al menos una raíz real entre x_a y x_b.

Procedimiento del método de la bisección

a. Se escogen los valores iniciales x_a y x_b de forma que la función cambie de signo sobre el intervalo.

b. La primera aproximación a la raíz x_c, se determina como:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2} \qquad (2.4)$$

c. Se realizan las evaluaciones y se determina en que subintervalo se encuentra la raíz.
   - Si f (x_a)∗f (x_c) < 0, entonces la raíz se encuentra dentro del primer subintervalo. Por lo tanto, el nuevo valor de $x_b = x_c$ para el próximo calculo.
   - Si f (x_a)∗f (x_c) > 0, entonces la raíz se encuentra dentro del segundo subintervalo. Por lo tanto, el nuevo valor de $x_a = x_c$ para el próximo calculo.
   - Si f (x_a)∗f (x_c) = 0, entonces la raíz es exactamente igual a x_c.

d. Se determina una nueva aproximación a la raíz, mediante la ecuación anotada anteriormente.

e. Se chequea si la nueva aproximación es tan exacta como se desea. Si es así, termina el cálculo, caso contrario se regresa al paso (c).

Ejemplo 1: Determinar la menor raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-4}$

Solución. Se separan las raíces de la ecuación analíticamente. La función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x$ está definida sobre todo el eje numérico.

Se iguala a cero la f ' (x) y se calcula la raíz de la derivada:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 3$; $3x^2 + 6x - 3 = 0$; $x_1 = -2.414213$; $x_2 = 0.414213$

Se elabora la tabla de los signos de la función f (x)

Tabla 2.3

x	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
f(x)	10,625	10	7,875	5	2,125	0	-0,625	1	5,625
signo	+	+	+	+	+	-	-	+	+

ISBN: 978-631-6557-41-4

De la tabla de signos se puede ver que existe una raíz positiva en el segmento [0, 1]

Para utilizar el método de la bisección se toman como un extremo del segmento 0,6 y como el otro extremo 1, tomando como referencia la figura 2.4. Aplicando el procedimiento de la bisección se obtiene la tabla 2.4 adjunta

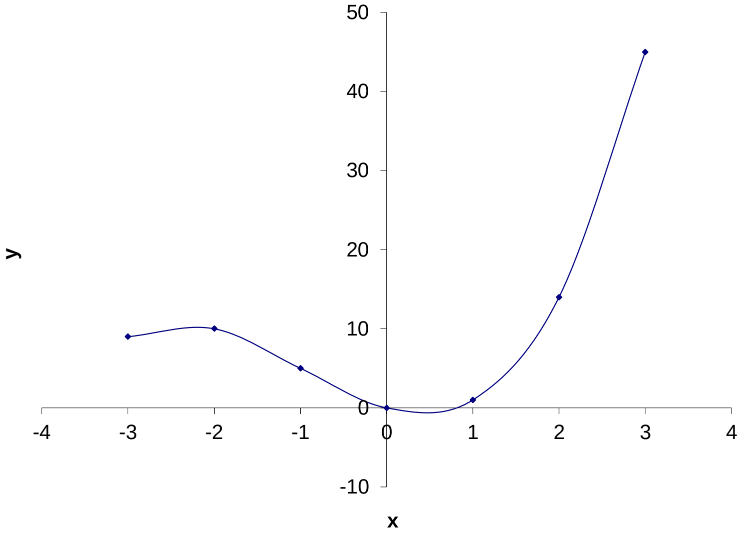


Figura 2.4. Representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x$

Tabla 2.4

Iteración	xa	xb	xc	f(xa)	f(xc)	f(xa)*f(xc)	SIGNO	ea [%]	Criterio de paro
1	0,6	1	0,8	-0,504	0,032	-0,016128	-		
2	0,6	0,8	0,7	-0,504	-0,287	0,144648	+	14,285714	continuar
3	0,7	0,8	0,75	-0,287	-0,140625	0,04035938	+	6,666667	continuar
4	0,75	0,8	0,775	-0,140625	-0,05764062	0,00810571	+	3,225806	continuar
5	0,775	0,8	0,7875	-0,057640625	-0,0136582	0,00078727	+	1,587302	continuar
6	0,7875	0,8	0,79375	-0,013658203	0,00896069	-0,00012239	-	0,787402	continuar
7	0,7875	0,79375	0,790625	-0,013658203	-0,00240121	3,2796E-05	+	0,395257	continuar
8	0,790625	0,79375	0,7921875	-0,002401215	0,00326661	-7,8438E-06	-	0,197239	continuar
9	0,790625	0,7921875	0,79140625	-0,002401215	0,00042942	-1,0311E-06	-	0,098717	continuar
10	0,790625	0,79140625	0,79101563	-0,002401215	-0,00098672	2,3693E-06	+	0,049383	continuar
11	0,79101563	0,79140625	0,79121094	-0,000986718	-0,00027885	2,7515E-07	+	0,024685	continuar
12	0,79121094	0,79140625	0,79130859	-0,000278854	7,5231E-05	-2,0979E-08	-	0,012341	continuar
13	0,79121094	0,79130859	0,79125977	-0,000278854	-0,00010182	2,8394E-08	+	0,006171	continuar
14	0,79125977	0,79130859	0,79128418	-0,000101824	-1,33E-05	1,3542E-09	+	0,003085	continuar
15	0,79128418	0,79130859	0,79129639	-1,32998E-05	3,0965E-05	-4,1183E-10	-	0,001543	continuar
16	0,79128418	0,79129639	0,79129028	-1,32998E-05	8,8323E-06	-1,1747E-10	-	0,000771	continuar
17	0,79128418	0,79129028	0,79128723	-1,32998E-05	-2,2338E-06	2,9709E-11	+	0,000386	continuar
18	0,79128418	0,79128723	0,79128571	-1,32998E-05	-7,7668E-06	1,033E-10	+	0,000193	continuar
19	0,79128418	0,79128571	0,79128494	-1,32998E-05	-1,0533E-05	1,4009E-10	+	0,000096	ok

En la iteración número 19, se obtiene que la raíz x_c =0,79128494 cumple la condición de precisión deseada ya que

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$0{,}000096 < \varepsilon = 10^{-4}$$

Ejemplo 2: Determinar la menor raíz positiva de la ecuación $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$

Solución

El algoritmo de la bisección da los valores de la tabla 2.5.

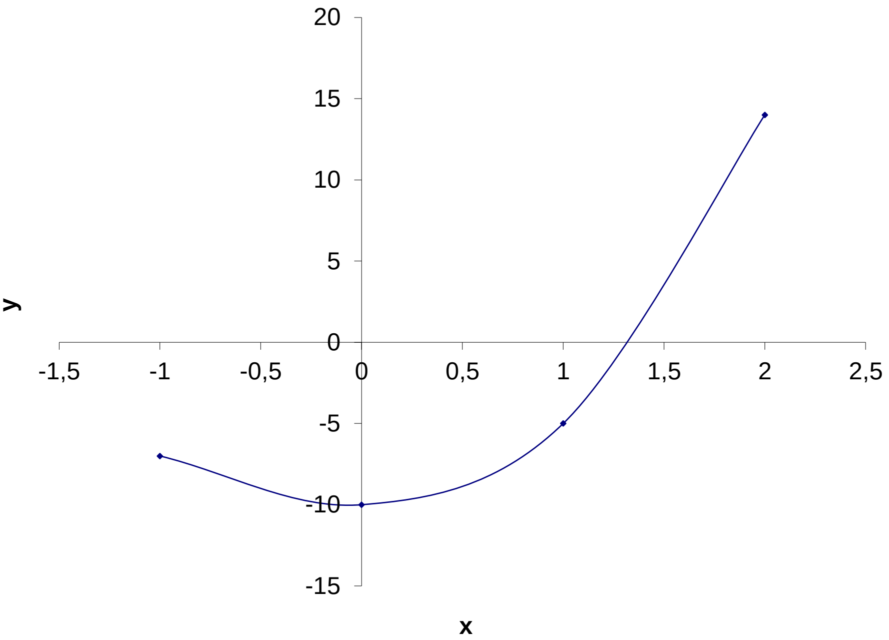


Figura 2.5. Representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Para utilizar el método de la bisección se toman como un extremo del segmento 1 y como el otro extremo 1,5, tomando como referencia la figura 2.5. Aplicando el procedimiento de la bisección se obtiene la tabla 2.5 adjunta

Tabla 2.5

Iteración	xa	xb	**xc**	f(xa)	f(xc)	**f(xa)*f(xc)**	**SIGNO**	ea [%]	Crit, de paro
1	1	1,5	1,25	-5	-1,796875	8,984375	+		
2	1,25	1,5	1,375	-1,796875	0,16210938	-0,29129028	-	9,090909	continuar
3	1,25	1,375	1,3125	-1,796875	-0,84838867	1,52444839	+	4,761905	continuar
4	1,3125	1,375	1,34375	-0,848388672	-0,35098267	0,29776972	+	2,325581	continuar
5	1,34375	1,375	1,359375	-0,350982666	-0,09640884	0,03383783	+	1,149425	continuar
6	1,359375	1,375	1,3671875	-0,096408844	0,03235579	-0,00311938	-	0,571429	continuar
7	1,359375	1,3671875	1,36328125	-0,096408844	-0,03214997	0,00309954	+	0,286533	continuar
8	1,36328125	1,3671875	1,36523438	-0,032149971	7,2025E-05	-2,3156E-06	-	0,143062	continuar
9	1,36523438	1,3671875	1,36621094	7,20248E-05	0,01620618	1,1672E-06	+	0,071480	continuar
10	1,36621094	1,3671875	1,36669922	0,016206182	0,02427905	0,00039347	+	0,035727	continuar
11	1,36669922	1,3671875	1,36694336	0,024279052	0,02831694	0,00068751	+	0,017860	continuar
12	1,36694336	1,3671875	1,36706543	0,028316936	0,03033624	0,00085903	+	0,008929	continuar

ISBN: 978-631-6557-41-4

13	1,36706543	1,3671875	1,36712646	0,03033624	0,03134598	0,00095092	+	0,004464	continuar
14	1,36712646	1,3671875	1,36715698	0,031345982	0,03185088	0,0009984	+	0,002232	continuar
15	1,36715698	1,3671875	1,36717224	0,031850876	0,03210333	0,00102252	+	0,001116	continuar
16	1,36717224	1,3671875	1,36717987	0,032103329	0,03222956	0,00103468	+	0,000558	ok

Después de 16 iteraciones, $x_c = 1{,}365717987$ aproxima la raíz , siendo f (x_c) < ε. Por lo tanto

$$0{,}00039347 < 10^{-3}$$

Para determinar la cantidad de iteraciones necesarias para resolver este problema con una exactitud de 10^{-3} por medio de $a_1 = 1$ y $b_1 = 2$, hay que encontrar un número que satisfaga

$$|c_n - c| \quad \leq \quad 2^{-n}\,(b-a) = 2^{-n} \quad < \quad 10^{-3}$$

$$-n\log_{10}\,2 < -3 \qquad o \qquad n \quad > \quad \frac{3}{\log_{10}\,2} \approx 9.96$$

Por lo tanto, se necesitan aproximadamente diez iteraciones para lograr una precisión dentro de 10^{-3}.

2.4 MÉTODO DE LA REGLA FALSA (O DE LAS CUERDAS)

Supongamos que se da la ecuación f(x) = 0, donde f(x) es una función continua que tiene en el intervalo (x_a, x_b) las derivadas de primer orden y de segundo orden. La raíz se considera separada y se halla sobre el segmento [x_a, x_b], o sea, $f(x_a).f(x_b) < 0$.

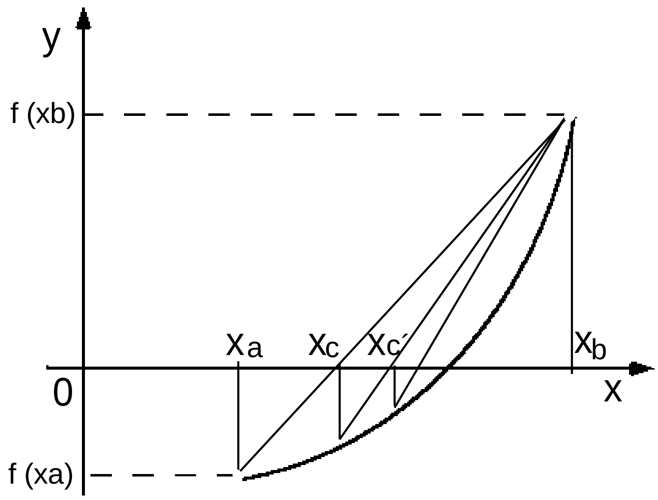


Figura 2.6. Representación del método de la regla falsa

La idea del método de las cuerdas se fundamente en que al tomar un intervalo [x_a, x_b] suficientemente pequeño el arco de la curva y = f(x) se puede reemplazar por la cuerda que lo

ISBN: 978-631-6557-41-4

subtiende. En calidad de valor aproximado de la raíz se toma el punto de intersección de la cuerda con el eje ox esto es x_c (figura 2.6).

Posteriormente se proyecta una vertical desde x_c hasta la función y se traza una nueva cuerda que permite obtener una nueva raíz aproximada $x_{c'}$ que está mucho más cerca de la raíz verdadera y así sucesivamente hasta alcanzar el grado de precisión deseado.

Analizando la figura 2.6, mediante triángulos semejantes, se puede tener la siguiente expresión

$$\frac{f(x_a)}{x_c - x_a} = \frac{f(x_b)}{x_c - x_b}$$

que resolviendo y ordenando nos permite obtener la fórmula de la regla falsa.

$$x_c = x_b - \frac{f(x_b)(x_a - x_b)}{f(x_a) - f(x_b)} \qquad (2.5)$$

Luego de la primera iteración se determina en que subintervalo se encuentra la raíz, mediante las mismas consideraciones utilizadas en el método de la bisección.A diferencia del método de la bisección esta verificación se lo realiza una sola vez.

Ejemplo 1. Con la ayuda del método de la Regla Falsa precisar hasta ε = 0.001 la menor raíz positiva de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x = 0$. (Sarraf et al., 2014)

Solución.

Graficando se puede ver que las raíces de la ecuación están separadas y la menor raíz positiva se encuentra sobre el segmento [0.5, 1].

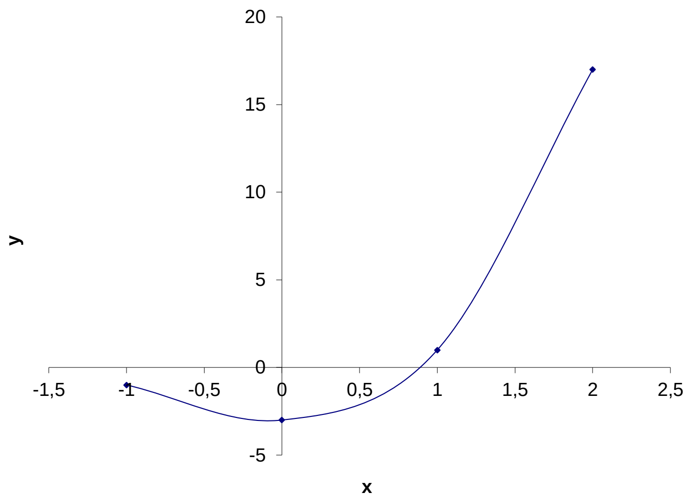


Figura 2.7. Representación gráfica de la función f (x) = $x^3 + 3x^2 - 3$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Según el método de la regla Falsa, para la primera iteración se tiene

$$x_c = x_b - \frac{(x_a - x_b)(x_b^3 + 3x_b^2 - 3x_b)}{(x_a^3 + 3x_a^2 - 3x_a) - (x_b^3 + 3x_b^2 - 3x_b)} = 1 - \frac{(0.5-1)\left[(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1)\right]}{\left[(0.6)^3 + 3(0.6)^2 - 3(0.6)\right] - \left[(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1)\right]} = 0.73404255$$

Para la segunda iteración, como el producto f (x_a). f (x_c) es positivo, la raíz se encuentra en el segundo subintervalo, por lo tanto, el nuevo valor de x_a es 0.73404255 y el valor de x_b sigue siendo 1.

$$x_c = 1 - \frac{(0.73404255-1)\left[(1)^3 + 3(1)^2 - 3\right]}{\left[(0.73404255)^3 + 3(0.73404255)^2 - 3(0.73404255)\right] - \left[(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1)\right]} = 0.77653575$$

y así sucesivamente hasta alcanzar el grado de precisión deseado, ver tabla 2.6 adjunta.

Tabla 2.6

Iteración	xa	f(xa)	xb	f(xb)	xc	f(xc)	f(xa)*f(xc)	signo	er
1	0,6	-0,50400	1	1,0000000	0,7340426	-0,1901566	0,0958389	+	
2	0,7340426	-0,19016	1	1,0000000	0,7765357	-0,0523269	0,0099503	+	5,4721492
3	0,7765357	-0,05233	1	1,0000000	0,7876475	-0,0131293	0,000687	+	1,4107502
4	0,7876475	-0,01313	1	1,0000000	0,7903994	-0,0032174	4,224E-05	+	0,3481664
5	0,7903994	-0,00322	1	1,0000000	0,7910716	-0,0007839	2,522E-06	+	0,0849747
6	0,7910716	-0,00078	1	1,0000000	0,7912352	-0,0001907	1,495E-07	+	0,0206825
7	0,7912352	-0,00019	1	1,0000000	0,7912751	-0,0000464	8,846E-09	+	0,0050307
8	0,7912751	-0,00005	1	1,0000000	0,7912847	-0,0000113	5,232E-10	+	0,0012234
9	0,7912847	-0,00001	1	1,0000000	0,7912871	-0,0000027	3,094E-11	+	0,0002975

Ejemplo 2. Obtener una solución única de $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en el intervalo [1, 2] mediante el método de la regla falsa. (Sarraf et al., 2014)

Solución

Para la primera iteración se tiene

$$x_c = x_b - \frac{(x_a - x_b)(x_b^3 + 4x_b^2 - 10)}{(x_a^3 + 4x_a^2 - 10) - (x_b^3 + 4x_b^2 - 10)} = 1.5 - \frac{(1-1.5)\left[(1.5)^3 + 4(1.5)^2 - 10\right]}{\left[(1)^3 + 4(1)^2 - 10\right] - \left[(1.5)^3 + 4(1.5)^2 - 10\right]} = 1.338983$$

Para la segunda iteración

$$x_c = 1.5 - \frac{(1.338983 - 1.5)\left[(1.338983)^3 + 4(1.338983)^2 - 10\right]}{\left[(1.338983)^3 + 4(1.338983)^2 - 10\right] - \left[(1.5)^3 + 4(1.5)^2 - 10\right]} = 1.363563$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

y así sucesivamente hasta alcanzar el grado de precisión deseado, ver tabla 2.7 adjunta.
Tabla 2.7

Iteración	xa	f(xa)	xb	f(xb)	**xc**	f(xc)	f(xa)*f(xc)	signo	er
1	1	-5,00000	1,5	2,3750000	1,3389831	-0,4278675	2,1393375	+	
2	1,3389831	-0,42787	1,5	2,3750000	1,3635628	-0,0275080	0,0117698	+	1,8026158
3	1,3635628	-0,02751	1,5	2,3750000	1,365125	-0,0017338	4,769E-05	+	0,114434
4	1,365125	-0,00173	1,5	2,3750000	1,3652234	-0,0001091	1,892E-07	+	0,0072067
5	1,3652234	-0,00011	1,5	2,3750000	1,3652296	-0,0000069	7,497E-10	+	0,0004536
6	1,3652296	-0,00001	1,5	2,3750000	1,36523	-0,0000004	2,97E-12	+	2,855E-05
7	1,36523	0,00000	1,5	2,3750000	1,36523	0,0000000	1,177E-14	+	1,797E-06
8	1,36523	0,00000	1,5	2,3750000	1,36523	0,0000000	4,662E-17	+	1,131E-07
9	1,36523	0,00000	1,5	2,3750000	1,36523	0,0000000	1,847E-19	+	7,12E-09

2.5 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (O MÉTODO DE LAS TANGENTES)

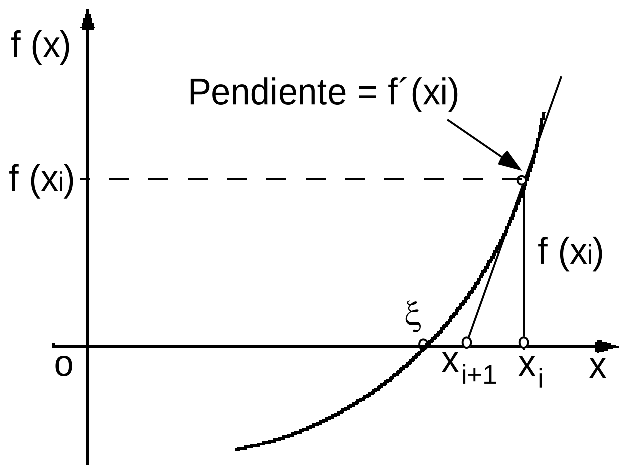


Figura 2.8. Representación gráfica del método de Newton-Raphson

Si se supone que la raíz de la ecuación f (x) = 0 está separada sobre el segmento considerado, con la particularidad de que f ' (x) y f '' (x) son continuas y conservan signos constantes en todo el segmento. Se conoce que la pendiente en un punto x_i de una curva es igual a la tangente en dicho punto, es decir.

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} \qquad (2.6)$$

que se puede reordenar para obtener:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (2.7)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

a la que se conoce como la fórmula de Newton-Raphson. Esta fórmula permite determinar la sucesión de los valores aproximados x_1, x_2, . . . , x_i, . . . , en la cual cada término sucesivo es más próximo a la raíz ξ que el precedente.

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de las tangentes, precisar hasta ε = 0.000001 la raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x = 0$, situada sobre el segmento [0; 1]. (Torres Ortega, 2013)

Solución.

$$f\ (x) = x^3 + 3x^2 - 3\text{x}$$

Se determina la primera derivada de la ecuación

$$f\,'(x) = 3x^2 + 6x\ \text{-3}$$

Aplicando la fórmula de Newton se tiene

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 3x_i^2 - 3x}{3x_i^2 + 6x_i - 3} = 0{,}6 - \frac{(0.6)^3 + 3(0.6)^2 - 3(0.6)}{3(0.6)^2 + 6(0{,}6) - 3} = 0.9$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 3x_i^2 - 3x}{3x_i^2 + 6x_i - 3} = 0.9 - \frac{(0.9)^3 + 3(0.9)^2 - 3(0.9)}{3(0{,}9)^2 + 6(0.9) - 3} = 0.80496894$$

y así sucesivamente hasta alcanzar el grado de precisión deseado

Tabla 2.8

i	xi	f(xi)	f'(xi)	xi+1	εa %
1	0,6	-0,504	1,68	0,9	
2	0,9	0,459	4,83	0,804968944	11,8055555555556
3	0,80496894	0,050617923	3,773738667	0,791555741	1,6945367625777
4	0,79155574	0,000971804	3,62901592	0,791287954	0,0338419544974
5	0,79128795	3,85398E-07	3,6261376	0,791287847	0,0000134317051
6	0,79128785	6,08402E-14	3,626136458	0,791287847	0,0000000000021

De la tabla 2.8 se ve que

$$Por\ lo\ tanto\ la\quad raiz\ es\qquad \xi = 0{,}791287847$$

Ejemplo 2. Obtener una solución única de $x^3 + 4\,x^2 - 10 = 0$ en el intervalo [1; 2] mediante el método de Newton. (Pérez Rojas et al., 2022)

Solución

$$f\ (x) = x^3 + 4\,x^2 - 10$$

Mediante el mismo proceso aplicado anteriormente se tiene

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f'(x) = 3x^2 + 8x;$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 4x_i^2 - 10}{3x_i^2 + 8x_i} = 0{,}6 - \frac{(0.6)^3 + 4(0.6)^2 - 10}{3(0.6)^2 + 8(0{,}6)} = 2.01904762$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 4x_i^2 - 10}{3x_i^2 + 8x_i} = 2.019047 - \frac{(2.019047)^3 + 4(2.019047)^2 - 10}{3(2.019047)^2 + 8(2.019047)} = 1.50685865$$

y así sucesivamente hasta alcanzar el grado de precisión deseado.

Tabla 2.9

i	xi	f(xi)	f'(xi)	**xi+1**	εa %
1	0,6	-8,344	5,88	2,019047619	
2	2,01904762	14,53696836	28,38204082	1,506858645	33,9905123486068
3	1,50685865	2,503999768	18,86673809	1,374138312	9,6584406526699
4	1,37413831	0,14774945	16,6578748	1,365268666	0,6496630348403
5	1,36526867	0,000638298	16,51402492	1,365230014	0,0028311603053
6	1,36523001	1,20948E-08	16,51339909	1,365230013	0,0000000536483

2.6 MÉTODO DE LA SECANTE

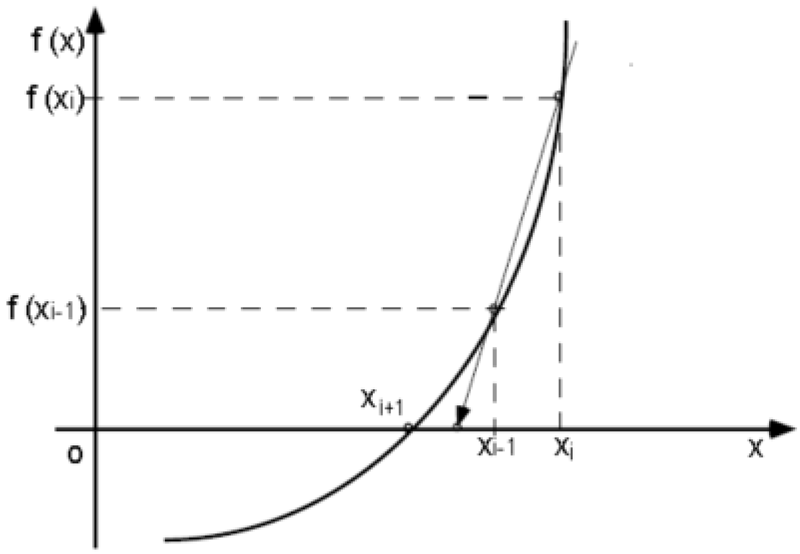


Figura 2.9 Representación gráfica del método de la secante

A partir de la figura 2.9, la pendiente de la secante en el punto x_i se puede aproximar mediante diferencias finitas divididas

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \qquad (2.8)$$

Si se reemplaza esta aproximación a la primera derivada en la ecuación de Newton (2.6), se tiene la formula del método de la secante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \qquad (2.9)$$

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de la Secante, precisar hasta ε = 0,00001 la raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x = 0$, situada sobre el segmento [0; 1].

Solución

Tomando como valores iniciales x_{i-1}= 0,6 y x_i = 0,7 y aplicando la fórmula de la secante se tiene los valores que se muestran en la tabla 2.10

Tabla 2.10

i	Xi	Xi-1	f(Xi)	f(Xi-1)	Xi+1	εa %
1	0,7	0,6	-0,287	-0,504	0,83225806	
2	0,83225806	0,7	0,157652714	-0,287	0,78536564	5,970775866310
3	0,78536564	0,832258065	-0,021286457	0,157652714	0,79094393	0,705269222191
4	0,79094393	0,785365642	-0,001246469	-0,021286457	0,79129089	0,043847880042
5	0,79129089	0,790943926	1,1035E-05	-0,001246469	0,79128785	0,000384779835
6	0,79128785	0,791290891	-5,62682E-09	1,1035E-05	0,79128785	0,000000196102

Por lo tanto, la raíz es **0.79128785**

Ejemplo 2. Obtener una solución única de $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en el intervalo [1; 2] mediante el método de la secante, precisar hasta ε = 0,00001 (R. Burden & Faires, 2002)

Solución

Aplicando el mismo proceso anterior se tiene

Tabla 2.11

i	Xi	Xi-1	f(Xi)	f(Xi-1)	Xi+1	εa %
1	2	1.5	14	2.375	1.39784946	
2	1.39784946	2	0.547306731	14	1.37335169	1.783794669322
3	1.37335169	1.397849462	0.134650997	0.547306731	1.36535798	0.585466139567
4	1.36535798	1.373351688	0.002113288	0.134650997	1.36523052	0.009336014130
5	1.36523052	1.36535798	8.38846E-06	0.002113288	1.36523001	0.000037205958
6	1.36523001	1.365230521	5.26228E-10	8.38846E-06	1.36523001	0.000000002334

ISBN: 978-631-6557-41-4

Por lo tanto, la raíz es **1,36523001**

Comparando con el método de la regla falsa se puede ver que se obtiene la raíz con un menor número de iteraciones y los valores que se escogen inicialmente no siempre encierran la raíz que se pretende obtener, como se puede ver en el ejemplo 2.

2.7 MÉTODO DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS (MÉTODO DE LAS ITERACIONES)

La ventaja principal de este método consiste en que en cada paso se cumplen operaciones del mismo tipo lo que facilita en grado considerable la programación en computadoras basada en algoritmos iterativos. (Seminario, 2012)

La esencia del método de iteraciones consiste en lo siguiente. Consideremos la ecuación

$$f(x) = 0$$

Se supone que f(x) es la función continua sobre el segmento $[x_a, x_b]$, la cual se anula dentro de este intervalo, al menos en un punto ξ. Se necesita precisar como mínimo, una de sus raíces reales situadas sobre $[x_a, x_b]$.

Para utilizar este método se requiere transformar la función de la forma f (x) = 0, a la forma x = g (x). Esta transformación se puede llevar a cabo mediante operaciones algebraicas o simplemente agregando x a cada lado de la ecuación original.

Ejemplo:	$x^2 - 2x + 3 = 0$	forma f (x) = 0
	$x = \frac{x^2+3}{2}$	forma x = g (x)
	$x = \sqrt{2x-3}$	forma x = g (x)
	$x = x^2 - x + 3$	forma x = g (x)

Cabe la pena aclarar que no todas estas funciones transformadas son convergentes

Se elige en calidad de aproximación inicial cualquier valor $x_i \in [x_a, x_b]$. Realizamos el proceso iterativo hasta llegar a una aproximación satisfactoria x_{i+1}, o bien establecer que en proceso iterativo no converge a la raíz.

Ejemplo 1. Haciendo uso del método de las aproximaciones sucesivas, precisar hasta ε = 0.0001 la raíz de la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x = 0$, situada sobre el segmento [0; 1].

Solución

Se transforma la función de la forma f (x) a la forma g (x), para esto despejando x^2 se tiene

$$x = \sqrt{\frac{3x - x^3}{3}}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se toma como valor inicial x = 0.5 y se obtiene la siguiente tabla 2.12.

Tabla 2.12

Iterac.	X	g (x)	f (x)
1	0,5	0,6770032	-0,625
2	0,6770032	0,75734547	-0,34571647
3	0,75734547	0,78265448	-0,11692766
4	0,78265448	0,78920846	-0,03090585
5	0,78920846	0,7907943	-0,00751691
6	0,7907943	0,79117112	-0,00178835
7	0,79117112	0,79126027	-0,00042318
8	0,79126027	0,79128133	-0,00010001
9	0,79128133	0,79128631	-2,3629E-05
10	0,79128631	0,79128748	-5,5821E-06
11	0,79128748	0,79128776	-1,3187E-06
12	0,79128776	0,79128783	-3,1153E-07

La raíz es **0.79128783**

Ejemplo 2. Obtener una solución única de $5x^3$ - 20 x + 3 = 0 en el intervalo [0; 1] mediante el método de las iteraciones sucesivas.

Solución

Se transforma la función de la forma f (x) a la forma g (x), para esto despejando x se tiene

$$x = \frac{5x^3 + 3}{20}$$

Se toma como valor inicial x = 0.75 y se obtiene la siguiente tabla 2.13

Tabla 2.13

Iterac.	X	g (X)	f (x)
1	0,75	0,25546875	-2,02601008
2	0,25546875	0,15416825	-0,06504369
3	0,15416825	0,15091606	-0,00113517
4	0,15091606	0,1508593	-1,9383E-05
5	0,1508593	0,15085833	-3,3085E-07
6	0,15085833	0,15085832	-5,6472E-09
7	0,15085832	0,15085832	-9,639E-11

La raíz es **0.15085832**

2.8 MÉTODO DE BAIRSTOW

Se fundamenta en reducir el grado de un polinomio, dividiendo el mismo para un factor simple (x - t) o un factor cuadrático (x^2 – r x – s), con lo que se consigue disminuir su grado

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{2.10}$$

Si se divide para un factor (x - t) se obtiene un polinomio de un grado menor:

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + ... + b_n x^{n-1} \tag{2.11}$$

Con un residuo R = b_o, donde los coeficientes se calculan por las siguientes relaciones

$b_n = a_n$ (2.12)

$b_i = a_i + b_{i+1}t$ para i = n - 1 a 0

Si se divide para un factor (x^2 – r x – s) se obtiene un polinomio de dos grados menor:

$$f_{n-2}(x) = b_2 + b_3 x + ... + b_{n-1} x^{n-3} + b_n x^{n-2} \tag{2.13}$$

Con un residuo R = b_1(x – r) + b_o, donde los coeficientes se calculan por las siguientes relaciones

$b_n = a_n$ (2.14)

$b_i = a_{n-1} + r\, b_i$

$b_i = r\, b_{i+1} + s\, b_{i+2}$ para i = n - 2 a 0

El factor cuadrático se introduce para permitir la determinación de las raíces complejas.

Si x^2 – r x – s es un divisor exacto del polinomio, las raíces complejas pueden determinarse con la formula cuadrática.

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \tag{2.15}$$

Por lo tanto, este método se reduce a determinar los valores de r y s que hacen que el factor cuadrático sea un divisor exacto.

Como tanto b_o como b_1 son funciones de r y s, se pueden expandir usando una serie de Taylor, así

$$b_1(r + \Delta r, s + \Delta s) = b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s}\Delta s$$

(2.16)

$$b_o(r + \Delta r, s + \Delta s) = b_o + \frac{\partial b_o}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_o}{\partial s}\Delta s$$

Los incrementos, Δr y Δs, se estiman igualando a cero las ecuaciones

$$\frac{\partial b_1}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s}\Delta s = -b_1$$

(2.17)

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\frac{\partial b_o}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_o}{\partial s}\Delta s = -b_o$$

Las derivadas parciales se reemplazan por constantes, c, las mismas que se obtienen por las siguientes relaciones

$c_n = b_n$
$c_{n-1} = b_{n-1} + r\, c_n$ (2.18)
$c_i = b_i + r\, c_{i+1} + s\, c_{i+2}$ para i = n – 2 a 1

$$\begin{aligned} c_2\, \Delta r + c_3\, \Delta s &= -b_1 \\ c_1\, \Delta r + c_2\, \Delta s &= -b_o \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Este sistema se resuelve para obtener Δr y Δs, los cuales se utilizan para mejorar los valores iniciales de r y s.

En cada iteración, se estima un error aproximado de r y s

$$\lfloor \varepsilon_r \rfloor = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| x100\%$$

(2.20)

$$\lfloor \varepsilon_s \rfloor = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| x100\%$$

Cuando los errores de r y s caen por debajo de un valor determinado, se calculan las raíces mediante

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \qquad (2.21)$$

Se pueden presentar tres posibilidades:

1. Que el cociente sea un polinomio de tercer grado o mayor. En este caso, se aplica nuevamente el método de Bairstow, para evaluar un nuevo valor de r y s.
2. Que el cociente sea cuadrático. Se evalúan directamente las raíces por la ecuación cuadrática
3. Que el cociente sea un polinomio de primer grado. En este caso, la raíz se evalúa como x = - s/r

ISBN: 978-631-6557-41-4

Ejemplo 1: Determinar las raíces de la ecuación $x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$ (Danílina et al., 1985)

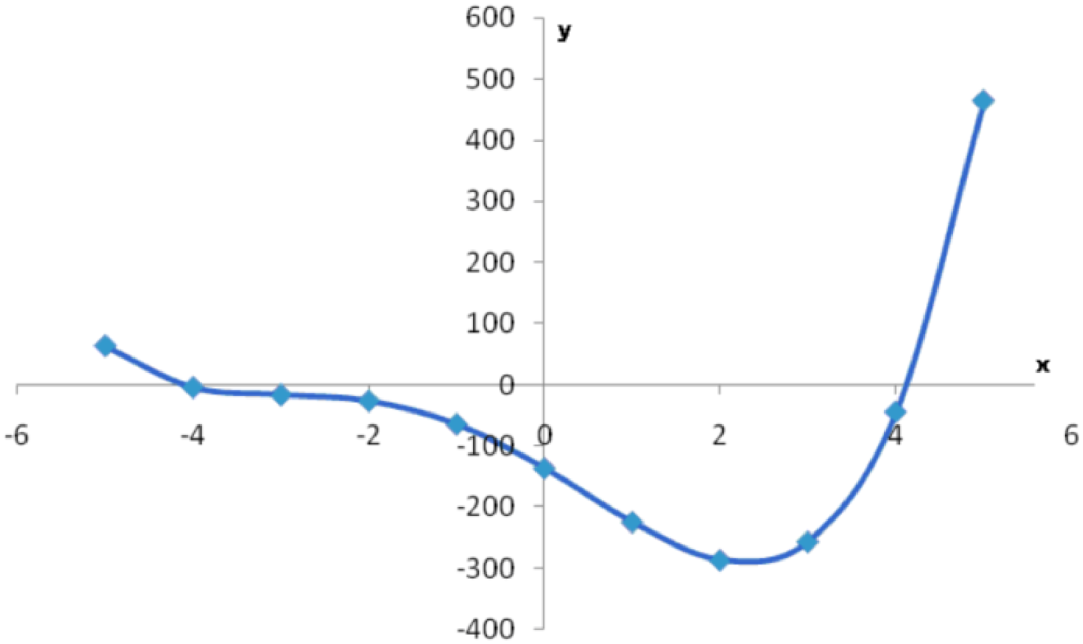


Figura 2.10. Grafica de la función $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$

Solución

$a_4 = 1$ $a_3 = 5$ $a_2 = -9$ $a_1 = -85$ $a_o = -136$

Primera iteración

Utilizando las ecuaciones (2.14) se tiene

$n = 4$ $b_4 = a_4 = 1$

$b_3 = a_3 + r\,b_4 = 5 + (0,5)(1) = 5,5$

$i = n - 2 = 4 - 2 = 2$

$b_2 = a_2 + r\,b_3 + s\,b_4 = -9 + (0,5)(0,5) + (1)(1) = -5,25$

$b_1 = a_1 + r\,b_2 + s\,b_3 = -85 + (0,5)(-5,25) + (1)(5,5) = -82,125$

$b_0 = a_0 + r\,b_1 + s\,b_2 = -136 + (0,5)(-82,125) + (1)(-5,25) = 182,3125$

Utilizando las ecuaciones (2.18) se tiene

$c_4 = b_4 = 1$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$c_3 = b_3 + r\,c_4 = 5{,}5 + (0{,}5)(1) = 6$

$i = n – 2 = 4 – 2 = 2$

$c_2 = b_2 + r\,c_3 + s\,c_4 = - 5{,}25 + (0{,}5)(6) + (1)(1) = - 1{,}25$

$c_1 = b_1 + r\,c_2 + s\,c_3 = - 82{,}125 + (0{,}5)(- 1{,}25) + (1)(6) = - 76{,}75$

Utilizando las ecuaciones (2.19) se plantea el sistema

$- 1{,}25\ \Delta r + 6\ \Delta s = 82{,}125$
$- 76{,}75\ \Delta r – 1{,}25\ \Delta r = - 182{,}3125$

$\Delta r = - 2{,}58954$
$\Delta s = 13{,}148$

$r_1 = r_0 + \Delta r = 0{,}5 – 2{,}58954 = -2{,}0895$

$s_1 = s_0 + \Delta s = 1 + 13{,}148 = 14{,}148$

Con las ecuaciones (2.20) se evalúa los errores de r y s

$$\varepsilon = \left|\frac{-2{,}58954}{0{,}5}\right| x100\% = 517{,}91$$

$$\varepsilon = \left|\frac{-13{,}148}{1}\right| x100\% = 1314{,}8$$

Segunda iteración

Se procede de igual forma que en la primera iteración

$n = 4$ $\qquad b_4 = a_4 = 1$

$b_3 = a_3 + r\,b_4 = 5 + (-2{,}0895)(1) = 2{,}91046$

$i = n – 2 = 4 – 2 = 2$

$b_2 = a_2 + r\,b_3 + s\,b_4 = - 9 + (- 2{,}0895)(2{,}91046) + (14{,}148)(1) = - 0{,}9335$

$b_1 = a_1 + r\,b_2 + s\,b_3 = - 85 + (- 2{,}0895)(- 0{,}9335) + (14{,}148)(2{,}91046) = - 41{,}872$

$b_0= a_0 + r\,b_1 + s\,b_2 = - 136 + (- 2{,}0895)(- 41{,}872) + (14{,}148)(- 0{,}9335) = -61{,}714$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$c_4 = b_4 = 1$

$c_3 = b_3 + r\,c_4 = 2{,}91046 + (-\,2{,}0895)(1) = 0{,}82091$

$i = n - 2 = 4 - 2 = 2$

$c_2 = b_2 + r\,c_3 + s\,c_4 = -\,0{,}9335 + (-\,2{,}0895)(0{,}82091) + (14{,}148)(1) = 11{,}4992$

$c_1 = b_1 + r\,c_2 + s\,c_3 = -\,41{,}872 + (-\,2{,}0895)(11{,}4992) + (14{,}148)(0{,}82091) = -\,54{,}286$

$11{,}4992\ \Delta r + 0{,}82091\ \Delta s = 41{,}872$
$-\ 54{,}286\ \Delta r + 11{,}4992\ \Delta r = 61{,}714$

$\Delta r = 2{,}43692$
$\Delta s = 16{,}8711$

$r_2 = r_1 + \Delta r = -\,2{,}0895 + 2{,}43692 = 0{,}34737$

$s_2 = s_1 + \Delta s = 14{,}148 + 16{,}8711 = 31{,}0191$

$$\varepsilon = \left|\frac{2{,}58954}{0{,}5}\right| x100\% = 517{,}91$$

$$\varepsilon = \left|\frac{13{,}148}{1}\right| x100\% = 1314{,}8$$

Finalmente, en la novena iteración se obtiene:

$a_4 = 1$	$b_4 = 1$	$c_4 = 1$
$a_3 = 5$	$b_3 = 5$	$c_3 = 5$
$a_2 = -\,9$	$b_2 = 8$	$c_2 = 25$
$a_1 = -\,85$	$b_1 = 0$	$c_1 = 85$
$a_0 = -\,136$	$b_0 = 0$	

$\Delta r = 0$	$r = 0$
$\Delta s = 0$	$s = 17$

Mediante la ecuación (2.21) se obtienen las dos primeras raíces

$$x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{(0)^2 + 4(17)}}{2} = \frac{0 \pm 8{,}2462}{2}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_1 = \frac{0 + 8{,}2462}{2} = 4{,}1231$$

$$x_1 = \frac{0 - 8{,}2462}{2} = -4{,}1231$$

De los valores de "b" se plantea la siguiente ecuación cuadrática:

$x^2 + 5\,x + 8 = 0$

Utilizando la ecuación cuadrática general, se obtienen las dos restantes raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\,(1)(8)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 32}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-5 + 7i}{2} = -2{,}5 + 3{,}5i$$

$$x_4 = \frac{-5 + 7i}{2} = -2{,}5 - 3{,}5i$$

2.9 MÉTODO DE MULLER

El procedimiento para seguir es el siguiente:

1. Se escogen tres valores iniciales x_{i-2}, x_{i-1} y x_i.
2. Se determinan los valores de la función en esos puntos f (x_{i-2}), f (x_{i-1}) y f (x_i)

3. Se determinan las diferencias finitas de primer y segundo orden

$$f\left[x_{i-1}, x_i\right] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \qquad \text{donde } i = 2$$

$$f\left[x_{i-2}, x_{i-1}\right] = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}} \qquad (2.22)$$

$$f\left[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\right] = \frac{f\left[x_{i-1}, x_i\right] - f\left[x_{i-2}, x_{i-1}\right]}{x_i - x_{i-2}} \qquad (2.23)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

4. Se determinan los coeficientes a_0, a_1 y a_2.

$a_2 = f\ [x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$

$a_1 = f\ [x_{i-1}, x_i] - (x_{i-1}+ x_i)\ a_2$

$a_o = f\ (x_i)\text{-}x_i\ [f\ [x_{i-1}, x_i]\text{-}x_{i-1}, a_2]$

5. Se determina el valor de aproximación x_{i+1}

$$x_{i+1} = \frac{2\,a_o}{-a_1 \pm \left(a_1^2 - 4\,a_o a_2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.24)$$

Ejemplo 1: Determinar las raíces de la ecuación $x^4 + 5\ x^3 - 9\ x^2 – 85\ x – 136$ (Faure et al., 2018)

Solución

Primera iteración

x_O =4,1	f (4,1) = - 8,6089
x_1 = 4,2	f (4,2) = 29,8496
x_2 = 4,3	f (4,3) = 71,5051

Se determinan las diferencias finitas

$$f[x_0, x_1] = \frac{29{,}8496 + 8{,}6089}{4{,}2 - 4{,}1} = 384{,}585$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{71{,}5051 - 29{,}8496}{4{,}3 - 4{,}2} = 416{,}555$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{416{,}555 - 384{,}585}{4{,}3 - 4{,}1} = 159{,}85$$

Determinación de los parámetros a_0, a_1 y a_2

a_2 = 159,85

$a_1 = f\ [x_1, x_2] - (x_1+ x_2)\ a_2$ = 416,555 - (4,2 + 4,3)*159,85 = - 942,17

$a_o = f\ (x_2)\text{-}x_2\ [f\ [x_1, x_2]\text{-}x_1, a_2]$ = 71,5051 – 4,3*(416,555 – 4,2*159,85) = 1167,21

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_{i+1} = \frac{2(1167{,}21)}{-942{,}17 + \left((-942{,}17) - 4\left((1167{,}21)(159{,}85)\right)\right)^{\frac{1}{2}}} = 4{,}123124$$

f (x_3) = $(4{,}123124)^4$ + 5 $(4{,}123124)^3$ – 9 $(4{,}123124)^2$- 85 (4,123124) – 136 = 0,00683

Segunda iteración

Se procede de igual forma que en la primera iteración

x_O =4,2	f (4,1) = 29,8496
x_1 = 4,3	f (4,2) = 71,5051
x_2 = 4,123124	f (4,3) = 0,00683

Se determinan las diferencias finitas

$$f[x_0, x_1] = \frac{71{,}5051 - 29{,}8496}{4{,}3 - 4{,}2} = 416{,}555$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{0{,}00683 - 71{,}5051}{4{,}123124 - 4{,}3} = 404{,}2277$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{404{,}2277 - 416{,}555}{4{,}123124 - 4{,}2} = 160{,}3523$$

Determinación de los parámetros a_0, a_1 y a_2

a_2 = 160,3523

a_1 = f [x_1, x_2] - (x_1+ x_2) a_2 = 404,2277 - (4,3 + 4,123124)*160,3523 = - 946,4397

a_o = f (x_2)-x_2 [f [x_1, x_2]-x_1, a_2] = 0,00683 – 4,123124*(404,2277 – 4,123124*160,3523) = 1176,282

$$x_{i+1} = \frac{2(1176{,}282)}{-946{,}4397 + \left((-946{,}4397) - 4\left((1176{,}282)(160{,}3523)\right)\right)^{\frac{1}{2}}} = 4{,}12310$$

f (x_3) = $(4{,}12310)^4$ + 5 $(4{,}12310)^3$ – 9 $(4{,}12310)^2$- 85 (4,12310) – 136 = - 0,0000053753

2.10 RAÍCES MÚLTIPLES

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangente al eje x.

Por ejemplo, f (x) = (x - 4)(x - 1)(x - 1) = x^3- 6 x^2 + 9 x - 4

f (x) = (x - 4)(x - 1)(x - 1)(x - 1) = x^4- 7 x^3 + 15 x^2 – 13 x + 4

ISBN: 978-631-6557-41-4

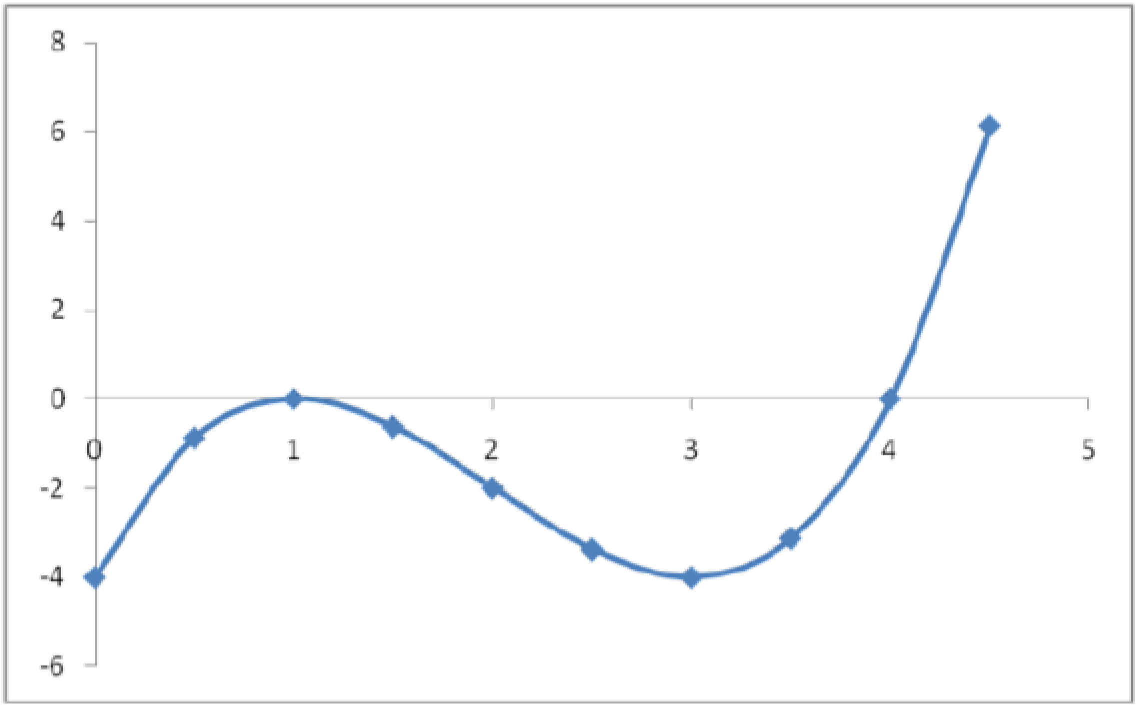


Figura 2.11. Raíz doble f (x) $= x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

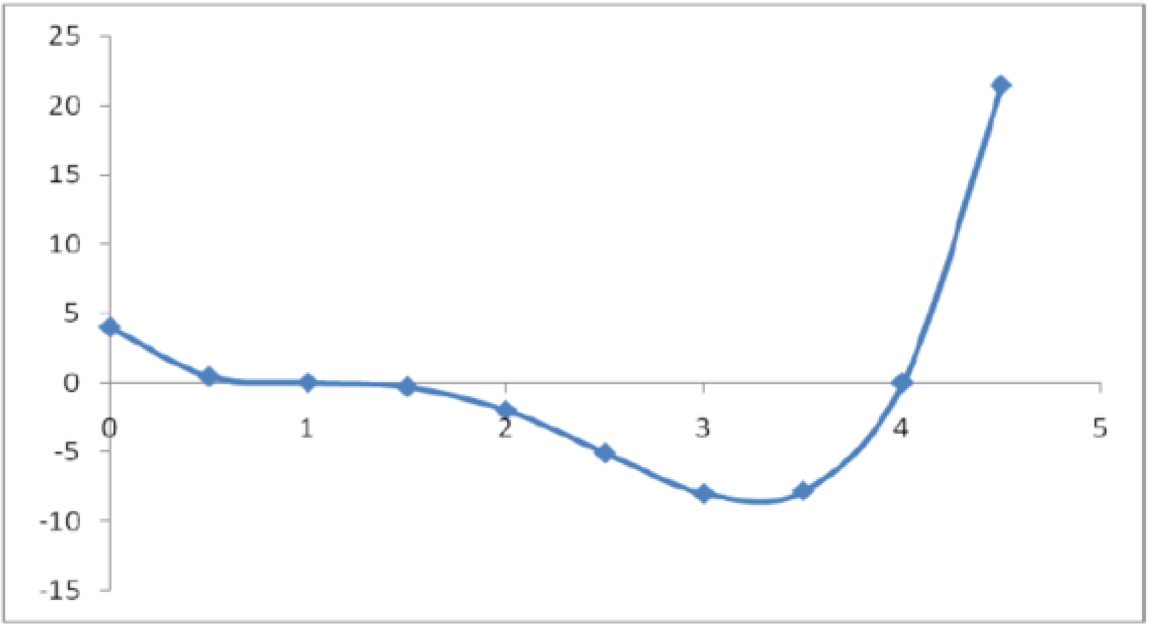


Figura 2.12. Raiz triple f (x) $= x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4$

En estos casos, los métodos tradicionales presentan algunas dificultades, por lo que se deben utilizar métodos alternos:

a. Método modificado de Newton-Raphson

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad \text{m = multiplicidad de la raíz} \qquad (2.25)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Ejemplo: Hallar la raíz triple de $f(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 30x - 13$

Primera iteración (i = 0)

$$x_1 = 0{,}6 - \frac{(3)(0{,}2176)}{(-1{,}696000)} = 0{,}984906$$

Segunda iteración (i = 1)

$$x_2 = 0{,}904906 - \frac{(3)(1{,}0369E-05)}{(-0{,}002064)} = 0{,}999975$$

Tercera iteración (i = 2)

$$x_3 = 0{,}999975 - \frac{(3)(4{,}9738E-14)}{(0{,}000000)} = 1{,}0000001$$

Tabla 2.14

xi	m	f (xi)	f '(xi)	xi+1	f (xi+1)
0,600000	3	0,2176	-1,696000	0,984906	1,0369E-05
0,984906	3	1,0369E-05	-0,002064	0,999975	4,9738E-14
0,999975	3	4,9738E-14	0,000000	1,000001	0

b. Método modificado de la Secante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)\,f''(x_i)} \qquad (2.26)$$

Ejemplo: Hallar la raíz triple de $f(x) = x^4 - 7x^3 + 15x^2 - 13x + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 30x - 13$

$f''(x) = 12x^2 - 42x + 30$

Primera iteración (i = 0)

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_1 = 0{,}6 - \frac{(0{,}2176)(-1{,}696000)}{(-1{,}696000)^2 - (0{,}2176)(9{,}12)} = 1{,}013777$$

Segunda iteración (i = 1)

$$x_2 = 1{,}013777 - \frac{(-7{,}8093E-06)(-0{,}001698)}{(-0{,}001698)^2 - (-7{,}8093E-06)(-0{,}245713)} = 1{,}000021$$

Tercera iteración (i = 2)

$$x_3 = 1{,}000021 - \frac{(-2{,}8422E-14)(0{,}000000)}{(0{,}000000)^2 - (-2{,}8422E-14)(-0{,}000383)} = 1{,}000001$$

Tabla 2.15

xi	f(xi)	f '(xi)	f ''(xi)	xi+1	f (xi+1)
0,600000	0,2176	-1,696000	9,120000	1,013777	-7,8093E-06
1,013777	-7,8093E-06	-0,001698	-0,245713	1,000021	-2,8422E-14
1,000021	-2,8422E-14	0,000000	-0,000383	1,000001	0

2.11 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

De la misma forma existen métodos para determinar la raíz de ecuaciones existen para determinar las raíces de sistemas. Uno de los más utilizados es el método de Newton. (Botello, 2011)

2.11.1 Método De Newton Para Sistemas No Lineales

Para aproximar la solución del sistema no lineal f (x) = 0 dada una aproximación inicial x, se aplica la fórmula de Newton adecuada para sistemas:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J\,(x^{(k-1)})^{-1} . f\,(x^{(k-1)}) \qquad (2.27)$$

donde $x^{(k)}$ = nuevos valores de las variables

$x^{(k-1)}$ = Aproximación inicial

$J\,(x^{(k-1)})^{-1}$ = Inversa de la matriz Jacobiana

$f\,(x^{(k-1)})$ = Función en el punto inicial

Ejemplo 1. Resolver el siguiente sistema

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0 \qquad \text{Aproximación inicial } x^{(0)} = 0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\frac{1}{2}x_1 x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

Solución

Primera iteración **k = 1**

Se determina el valor de la función $f(x^{(k-1)})$ reemplazando la aproximación inicial en cada una de las ecuaciones del sistema

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 4(0)^2 - 20(0) + \frac{1}{4}(0)^2 + 8 \\ \frac{1}{2}(0)(0)^2 + 2(0) - 5(0) + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Se determina la matriz Jacobiana $J(x^{(k-1)})$, derivando las ecuaciones con respecto a cada una de las variables

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_2^2 + 2 & x_1 x_2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz inversa de la Jacobiana $J(x^{(k-1)})^{-1}$

$$J(x^{(0)})^{-1} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ -0.02 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores conocidos en la fórmula de Newton se tiene

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ -0.02 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0.4 \\ -1.76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{bmatrix}$$

Lo que quiere decir que $x_1 = 0.4$ y $x_2 = 1.76$

Segunda iteración **k = 2**

Se determina el valor de la función $f(x^{(k-1)})$ reemplazando los valores de las incógnitas calculados en la iteración anterior, en cada una de las ecuaciones del sistema

$$f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4(0.4)^2 - 20(0.4) + \frac{1}{4}(1.76)^2 + 8 \\ \frac{1}{2}(0.4)(1.76)^2 + 2(0.4) - 5(1.76) + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4144 \\ 0.61952 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se determina la matriz Jacobiana, derivando las ecuaciones con respecto a cada una de las variables

$$J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 8x_1 - 20 & \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_2^2 + 2 & x_1 x_2 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16.8 & 0.88 \\ 3.5488 & -4.296 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz inversa de la Jacobiana

$$J(x^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} -0.06222 & -0.01274 \\ -0.05139 & -0.2433 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores conocidos en la fórmula de Newton se tiene

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.06222 & -0.01274 \\ -0.05139 & -0.2433 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.4144 \\ 0.61952 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1.76 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.09589 \\ -0.22342 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49589 \\ 1.98342 \end{bmatrix}$$

Lo que quiere decir que $x_1 = 0.49589$ y $x_2 = 1.98342$

De lo cual se puede deducir que $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 2$, o se puede continuar con las iteraciones necesarias hasta obtener estos valores.

Comprobación

$$4(0.5)^2 - 20(0.5) + \frac{1}{4}(2)^2 + 8 = 0$$
$$1 \quad -10 \quad +1 \quad +8 = 0$$
$$0 = 0$$

$$\frac{1}{2}(0.5)(2)^2 + 2(0.5) - 5(2) + 8 = 0$$
$$1 \quad +1 \quad -10 \quad +8 = 0$$
$$0 = 0$$

2.11.2 Método De La Iteración De Punto Fijo

Ejemplo 1. Resolver el siguiente sistema

$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0 \qquad \text{Aproximación inicial } x^{(0)} = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0$$

Solución

Despejando de la primera ecuación x_1, se tiene

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_1 = \frac{1}{5}x_1^2 + \frac{1}{80}x_2^2 + \frac{2}{5}$$

Despejando de la segunda ecuación x_2, se tiene

$$x_2 = \frac{1}{10}x_1 x_2^2 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{8}{5}$$

Aplicando la condición inicial $x_1 = x_2 = 0$ en las dos ecuaciones correspondientes se tiene

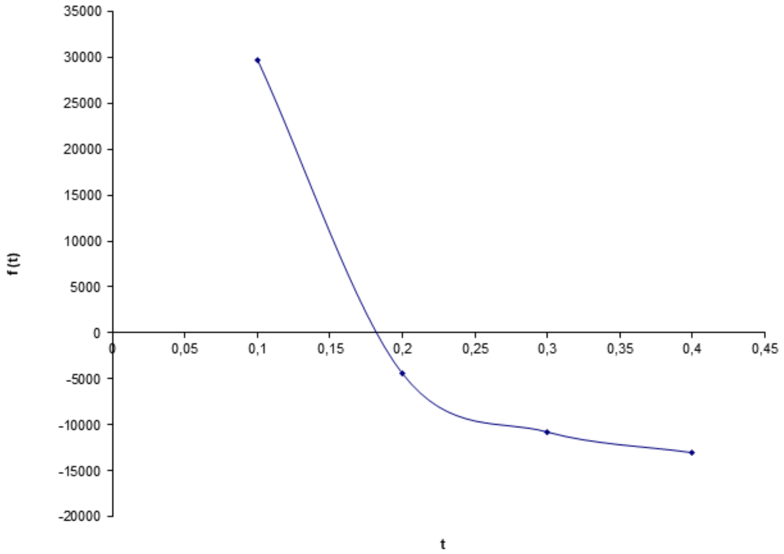
Tabla 2.16

x_1 (0)	x_2 (0)	x_1	x_2	f (x_1)	f (x_2)
0	0	0,4	1,6	8	8
0,4	1,6	0,464	1,8624	1,28	1,312
0,464	1,8624	0,48642	1,94654	0,44832	0,4207
0,48642	1,94654	0,49468	1,97887	0,16534	0,16165
0,49468	1,97887	0,49789	1,99159	0,06417	0,06359
0,49789	1,99159	0,49916	1,99664	0,02536	0,02527
0,49916	1,99664	0,49966	1,99866	0,0101	0,01008
0,49966	1,99866	0,49987	1,99946	0,00403	0,00403
0,49987	1,99946	0,49995	1,99979	0,00161	0,00161
0,49995	1,99979	0,49998	1,99991	0,00064	0,00064
0,49998	1,99991	0,49999	1,99997	0,00026	0,00026
0,49999	1,99997	0,5	1,99999	0,0001	0,0001
0,5	1,99999	0,5	1,99999	4,1E-05	4,1E-05
0,5	1,99999	0,5	2	1,6E-05	1,6E-05

2.12 PROBLEMAS DE APLICACIÓN A LA INGENIERÍA

1. El esfuerzo máximo de tensión $\tau_{máx}$ en una barra de sección rectangular es 16000 lb/pulg.^{2} y el momento de torsión T es de 600 lb-in Si el ancho de la barra w es de 4 plg., determinar el espesor t adecuado para esta barra. (Guerra A. et al., 2023)

Figura 2.13. Representación gráfica de la ecuación en función del espesor t



ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{wt^2}\left(3 + 1.8\frac{t}{w}\right)$$

Solución

Se reemplazan los valores conocidos en la ecuación dada

$$16000 = \frac{600}{4t^2}\left(3 + 1.8\frac{t}{4}\right)$$

resolviendo se tiene

$$f(t) = \frac{150}{t^2}(3 + 0.45t) - 16000 = 0$$

Se gráfica la ecuación para visualizar el rango dentro del cual se encuentra la raíz

Aplicando la regla falsa se tiene

Tabla 2.17

Iteración	**ta**	**f(ta)**	**tb**	**f(tb)**	**tc**	**f(tc)**	**f(ta)*f(tc)**	**signo**	**er**
1	0,17	-32,00692	0,2	-4412,5000000	0,1697808	8,7383522	-279,68774	-	
2	0,1697808	8,73835	0,2	-4412,5000000	0,1698405	-2,3792830	-20,791013	-	0,0351663
3	0,1698405	-2,37928	0,2	-4412,5000000	0,1698243	0,6483079	-1,542508	-	0,0095812
4	0,1698243	0,64831	0,2	-4412,5000000	0,1698287	-0,1766159	-0,1145015	-	0,0026102
5	0,1698287	-0,17662	0,2	-4412,5000000	0,1698275	0,0481174	-0,0084983	-	0,0007111
6	0,1698275	0,04812	0,2	-4412,5000000	0,1698278	-0,0131089	-0,0006308	-	0,0001937
7	0,1698278	-0,01311	0,2	-4412,5000000	0,1698277	0,0035714	-4,682E-05	-	5,278E-05

Por lo tanto, el espesor adecuado para esta barra es t = 0,16982774 pulgadas

2. Una determinada sustancia radiactiva se desintegra según la ecuación

$$A = P e^{-0.0248\,t}$$

donde P es la cantidad inicial en el tiempo t = 0 y A es la cantidad resultante en t años. Si inicialmente se depositan 800 mg de dicha sustancia, ¿cuánto tiempo habrá de transcurrir para que quede el 2 % de ésta?

Solución

$$0.02(800) = (800)e^{-0.0248\,t}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f\,(t) = e^{-0.0248\,t} - 0.02 = 0$$

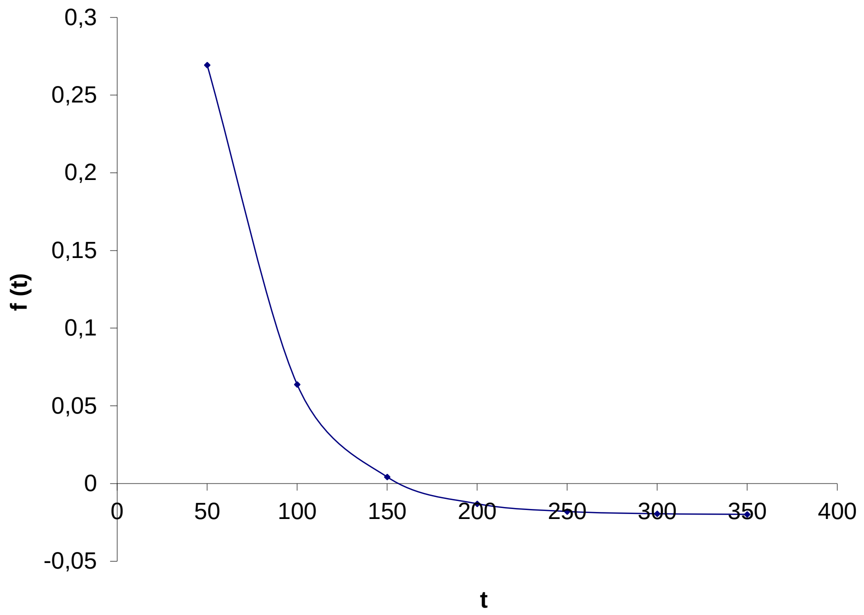


Figura 2.14. Representación gráfica de la ecuación en función del tiempo t

Aplicando el método de la secante se tiene

Tabla 2.18

i	ti	ti-1	f(ti)	f(ti-1)	ti+1	εa %
1	200	150	-0,012987072	0,004233968	162,293009	
2	162,293009	200	-0,002134193	-0,012987072	154,878018	4,787632482167
3	154,878018	162,2930086	0,001472658	-0,002134193	157,90552	1,917286722327
4	157,90552	154,8780183	-8,05152E-05	0,001472658	157,748577	0,099489412810
5	157,748577	157,9055198	-2,83373E-06	-8,05152E-05	157,742852	0,003629383132
6	157,742852	157,7485767	5,71985E-09	-2,83373E-06	157,742863	0,000007311116

Por lo tanto, el tiempo para que la fuente se reduzca al 2 % es t = 157,742863 años

3. El rendimiento de un motor viene dado por la siguiente ecuación

$$e = 1 - \frac{1}{r_k^{\,k-1}}\left(\frac{r_p\; r_c^{\,k-1}}{r_p - 1 + r_p\; k\;(r_c - 1)}\right)$$

Si las relaciones $r_k = 12$, $r_p = 4$, $r_c = 8$ y el rendimiento es del 20 %. ¿Cuál será el valor de k?.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Solución

Reemplazando datos y graficando se tiene

$$f(k) = 0.80 - \frac{1}{12^{k-1}}\left(\frac{(4)(8)^{k-1}}{3+28\,k}\right)$$

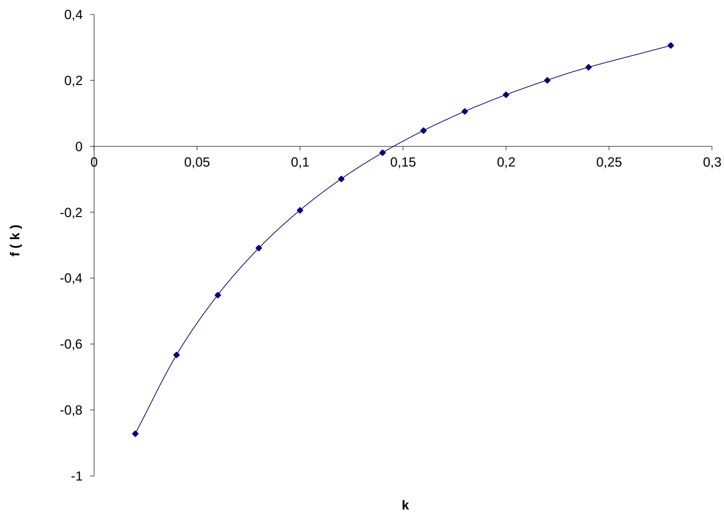


Figura 2.15. Representación gráfica de la ecuación en función del coeficiente k

Si se utiliza el método de la secante se obtiene

Tabla 2.19

i	ki	ki-1	f(ki)	f(ki-1)	ki+1	εa %
1	0,15	0,12	0,015839314	-0,098593316	0,14584752	
2	0,14584752	0,15	0,001625335	0,015839314	0,14537269	0,326627135905
3	0,14537269	0,145847518	-2,99284E-05	0,001625335	0,14538128	0,005905315439
4	0,14538128	0,145372691	5,55208E-08	-2,99284E-05	0,14538126	0,000010934778
5	0,14538126	0,145381277	1,89293E-12	5,55208E-08	0,14538126	0,000000000373

Por lo tanto, el valor de k para que se cumplan las relaciones anotadas es 0,14538126

4. Para un cojinete de rodillos cónicos la capacidad de carga radial F_R de catálogo viene dada por la siguiente ecuación

$$F_R = F_D\left[\frac{(L_D n_D / L_R n_R)}{4.48\left[\ln(1/R)\right]^{\frac{1}{1.5}}}\right]^{\frac{3}{10}}$$

Si la capacidad de carga radial F_R es de 10500 kg, la carga radial de diseño F_D es 15000 Kg., la duración nominal de catálogo L_R es 10000 horas y la duración de diseño L_D es 13000 horas, la velocidad nominal n_R es 2500 rpm y la velocidad de diseño n_D es 3600 rpm. Cuál es su confiabilidad R.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Solución

$$f\left(R\right)=15000\left[\frac{0.417857}{\left[\ln\left(1/R\right)\right]^{\frac{1}{1.5}}}\right]^{\frac{3}{10}}-10500$$

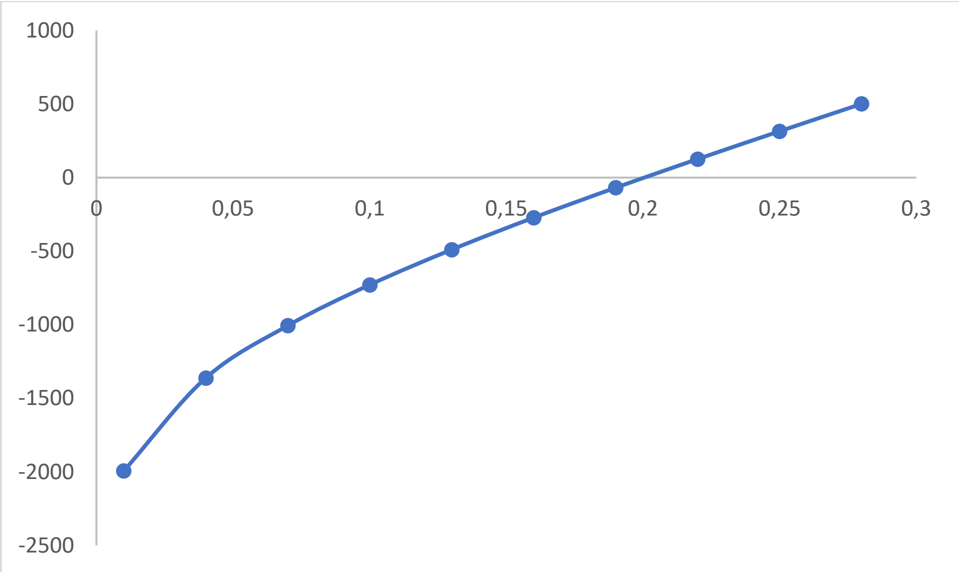


Figura 2.16. Representación gráfica de la ecuación en función de la confiabilidad R

Si se utiliza el método de la regla falsa se tiene
Tabla 2.20

Iteración	Ra	f(Ra)	Rb	f(Rb)	**Rc**	f(Rc)	f(Ra)*f(Rc)	signo	er
1	0,1	-728,60823	0,15	-342,6456433	0,1943885	-39,7453500	28958,789	+	
2	0,1943885	-39,74535	0,15	-342,6456433	0,2002129	-1,6230347	64,50808	+	2,9091394
3	0,2002129	-1,62303	0,15	-342,6456433	0,2004519	-0,0650346	0,1055535	+	0,1192202
4	0,2004519	-0,06503	0,15	-342,6456433	0,2004615	-0,0026039	0,0001693	+	0,0047778
5	0,2004615	-0,00260	0,15	-342,6456433	0,2004619	-0,0001043	2,715E-07	+	0,0001913
6	0,2004619	-0,00010	0,15	-342,6456433	0,2004619	-0,0000042	4,351E-10	+	7,659E-06

Por lo tanto, la confiabilidad R es 0,2004619

5. El sistema de amortiguación de un vehículo tiene como modelo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

la solución general de la ecuación diferencial es la siguiente

$$x\left(t\right)=e^{-nt}\left(x_o\cos pt+x_o\frac{n}{p}\operatorname{sen} pt\right)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\text{donde n} = c/(2m),\ \ p = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \qquad y \quad \frac{k}{m} > \frac{c^2}{4m^2}$$

Los valores de los parámetros son c = 1,5 x 10^7 g/s, k = 1,5 x 10^9 g/seg^2, y m = 2 x 10^6 g. Si x_o = 0,3, determinar la primera y segunda ocasión en que el auto pasa a través del punto de equilibrio.

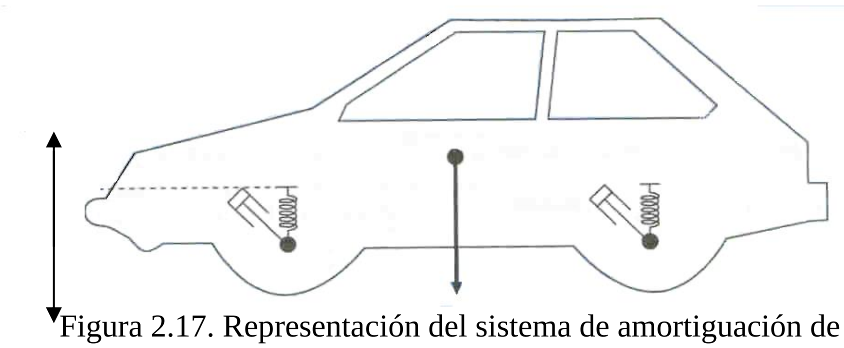


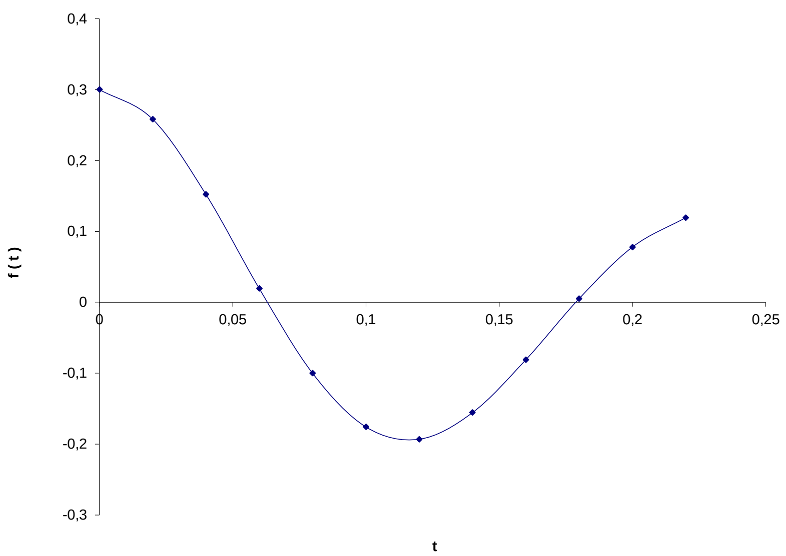
Figura 2.17. Representación del sistema de amortiguación de un auto

Solución

$$p = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{1.5x10^9}{2x10^6} - \frac{(1.5x10^7)^2}{4\left(2x10^6\right)^2}} = 27.128168$$

$$n = \frac{c}{2m} = \frac{1.5x10^7}{2\left(2x10^6\right)} = 3.75$$

$$x(t) = e^{-3.75t}\left(0.3\cos 27.128168t + 0.04147\,\text{sen}\,27.128168t\right)$$



ISBN: 978-631-6557-41-4

Figura 2.18. Representación gráfica de la ecuación en función del tiempo t

Aplicando la fórmula de la secante para ambos casos se tiene

Tabla 2.21

i	**ti**	**ti-1**	**f(ti)**	**f(ti-1)**	**ti+1**	**εa %**
1	0,08	0,07	-0,100024478	-0,044177144	0,06208966	
2	0,06208966	0,08	0,005705461	-0,100024478	0,06305615	1,532742424249
3	0,06305615	0,062089659	-0,000583019	0,005705461	0,06296654	0,142306238728
4	0,06296654	0,063056148	-1,86515E-06	-0,000583019	0,06296625	0,000456718496
5	0,06296625	0,062966542	6,30701E-10	-1,86515E-06	0,06296625	0,000000154387

Tabla 2.19

i	**ti**	**ti-1**	**f(ti)**	**f(ti-1)**	**ti+1**	**εa %**
1	0,17	0,14	-0,037737408	-0,155563403	0,17960842	
2	0,17960842	0,17	0,00350451	-0,037737408	0,17879195	0,456659666928
3	0,17879195	0,179608425	8,46331E-05	0,00350451	0,17877175	0,011302429474
4	0,17877175	0,178791954	-2,73432E-07	8,46331E-05	0,17877181	0,000036398134
5	0,17877181	0,178771749	2,06657E-11	-2,73432E-07	0,17877181	0,000000002751

Entonces la primera y segunda ocasión en el auto pasa por el punto de equilibrio es en t = 0,06296625 s y en t = 0,17877181 s.

ISBN: 978-631-6557-41-4

CAPITULO 3.

3. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1 NOTACIÓN MATRICIAL

Una matriz consta de un arreglo rectangular de elementos representados por un símbolo simple. Como se puede ver a continuación, [A] es la notación abreviada para la matriz y a_{ij} representa un elemento individual de la matriz. (R. L. Burden, 2011)

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Al conjunto horizontal de elementos se le llama renglón (fila) y al conjunto vertical se le llama columna. El primer subíndice i siempre denota el número del renglón en que se encuentra el elemento. El segundo subíndice j denota la columna. Por ejemplo, el elemento a_{23} está en el renglón 2 y en la columna 3.

La matriz del ejemplo tiene m renglones y n columnas y se dice que es dimensión m por n (m x n). Se le conoce como una matriz m por n.

A las matrices donde m = n se les llama matrices cuadradas. Por ejemplo, una matriz 4 x 4 es

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Se le llama diagonal principal de la matriz a la diagonal consistente de los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33} y a_{44}.

Las matrices cuadradas son particularmente importantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Para tales sistemas, el número de ecuaciones (correspondiente a las filas) y el número de incógnitas (correspondientes a las columnas) deben ser iguales en orden para que sea posible una solución única.

ISBN: 978-631-6557-41-4

3.1.1 Tipos De Matrices Cuadradas

Las matrices cuadradas más importantes son:

La matriz simétrica. Es aquella donde $a_{ij} = a_{ij}$ para toda i y para toda j. Por ejemplo,

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

es una matriz simétrica 3 por 3.

Matriz diagonal. Es una matriz cuadrada donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero, como en

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriz identidad. Es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, como en

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

El símbolo [I] denota la matriz identidad. Esta matriz tiene propiedades similares a la unidad.

Matriz triangular superior. Es aquella donde todos sus elementos bajo la diagonal principal son cero, como

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior. Es aquella donde todos sus elementos arriba de la diagonal principal son cero, como

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriz banda. Es aquella que tiene todos los elementos iguales a cero, con la excepción de una banda centrada sobre la diagonal principal

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

La matriz anterior tiene un ancho de banda de 3 y se le da un nombre especial, matriz tridiagonal.

3.1.2 Operaciones Con Matrices.

Dos matrices m x n son iguales, si y sólo si, cada elemento de la primera es igual a cada elemento de la segunda; esto es [A] = [B] si $a_{ij} = b_{ij}$ para toda i, j.

Suma y resta de matrices. La suma de dos matrices, [A] y [B], se realiza sumando los elementos correspondientes de cada matriz. Los elementos de la matriz [C] resultante se calculan como:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para i = 1, 2, . . . , m y j = 1, 2, . . . , n.

De forma similar, la resta de dos matrices, [E] y [F], se obtienen restando los términos correspondientes, como:

$$d_{ij} = e_{ij} + f_{ij}$$

para i = 1, 2, . . . , m y j = 1, 2, . . . , n.

De la definición anterior, se sigue inmediatamente que la suma y la resta se puede llevar a cabo sólo entre matrices que tienen las mismas dimensiones.
La suma y la resta son conmutativas:

$$[A]+[B]=[B]+[A]$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$[E]-[F]=-[F]+[E]$$

La suma y la resta también son asociativas, estos son,

$$[A]+([B]+[C])=([A]+[B])+[C]$$

Multiplicación de una matriz por un escalar. Se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz [A] por el escalar g, como en

$$[B]=g[A]=\begin{bmatrix} g\,a_{11} & g\,a_{12} & \dots & g\,a_{1n} \\ g\,a_{21} & g\,a_{22} & \dots & g\,a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g\,a_{m1} & g\,a_{m2} & \dots & g\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de dos matrices. Se representa como [C] = [A] [B], en donde los elementos de [C] se definen con la ayuda de la regla siguiente: para hallar el elemento c_{ij} dispuesto en la i-ésima fila y en la j-ésima columna del producto de dos matrices es necesario los elementos de la i-ésima fila de la matriz multiplicar por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de la segunda y sumar los productos obtenidos:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & {}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[C]=[A][B]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=a_{i1}\,b_{1j}+a_{i2}\,b_{2j}+\dots+a_{in}\,b_{nj}$$

$$(\ i = 1, 2\ , \dots , m\ ;\quad j = 1, 2, \dots , n)$$

Por ejemplo,

$$c_{23}=a_{21}\,b_{13}+a_{22}\,b_{23}+\dots+a_{2n}\,b_{n3}$$
$$c_{41}=a_{41}\,b_{11}+a_{42}\,b_{21}+\dots+a_{4n}\,b_{n1}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Esto es, el elemento c_{ij} se obtiene sumando el producto de elementos individuales del i-ésimo renglón (fila) de la primera matriz, en este caso de [A], por la j-ésima columna de la segunda matriz [B]. De acuerdo con esta definición, la multiplicación de dos matrices sólo se puede realizar si la primera matriz tiene tantas columnas como renglones la segunda. Por lo tanto, si [A] es una matriz m por n, [B] deberá ser una matriz n por p. En este caso, la matriz [C] resultante tendrá dimensión m por p. Sin embargo, si [B] fuese una matriz p por n, la multiplicación no se podría llevar a cabo.

$$[A]_{m\,x\,n} \quad [B]_{n\,x\,p} \qquad [C]_{m\,x\,p}$$

Si las dimensiones interiores son iguales la multiplicación es posible. Las dimensiones exteriores forman la dimensión del resultado.

Si las dimensiones de las matrices son compatibles, la multiplicación matricial es asociativa:

$$[A]\,([B]\,[C]) = ([A]\,[B])\,[C]$$

y distributiva:

$$[A]\,([B]+[C]) = ([A]\,[B]) + [A]\,[C]$$

$$([A]+[B])\,[C] = [A]\,[C] + [B]\,[C]$$

Sin embargo, en general la multiplicación no es conmutativa:

$$[A]\,[B] \neq [B]\,[A]$$

Esto es, el orden de multiplicación es importante.

Aunque la multiplicación es posible. la división matricial aún no está definida. Sin embargo, si una matriz [A] es cuadrada, hay otra matriz $[\ A\ ]^{-1}$, llamada la inversa de [A], tal que

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

De esta forma, la multiplicación de una matriz por su inversa es análoga a la división, en el sentido de que un número dividido por sí mismo es igual a uno, esto es, la multiplicación de una matriz por su inversa es igual a la matriz identidad.

En forma general para una matriz cuadrada regular de n-ésimo orden la matriz inversa se calcula con ayuda de la fórmula

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \cdots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \cdots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \cdots & \frac{A_{nn}}{d} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

Ejemplo: Hallar la matriz inversa A^{-1} para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución.

Se calcula el determinante de la matriz A:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(10-12) - 3(5-6) + 3(4-4) = -1$$

Puesto que el determinante $d \neq 0$, la matriz inversa A^{-1} existe.

Se determinan los complementos algebraicos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Se construye la matriz adjunta constituida por los complementos algebraicos

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se determina la matriz la matriz inversa mediante (3.1)

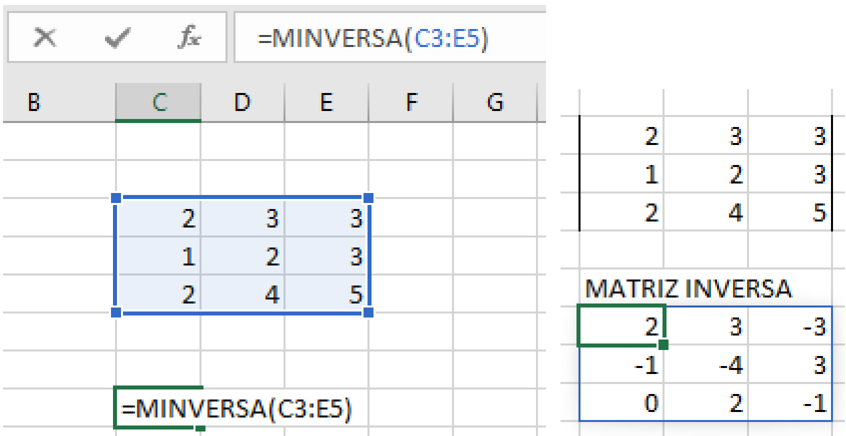
ISBN: 978-631-6557-41-4

$$A^{-1}=\bar{A}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{-1} & \frac{-3}{-1} & \frac{3}{-1}\\ \frac{1}{-1} & \frac{4}{-1} & \frac{-3}{-1}\\ \frac{0}{-1} & \frac{-2}{-1} & \frac{1}{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -3\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Verificación

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & -3\\ -1 & -4 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Haciendo uso de las funciones de Excel, la forma que se calcularía una matriz inversa mediante =MINVERSA(matriz), como se observa a continuación:



Las operaciones finales de las matrices que tienen utilidad en este análisis son las de transposición y de matriz aumentada. La transpuesta de una matriz comprende la transformación de sus filas (renglones) en columnas y sus columnas en filas. La transpuesta de la matriz:

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

denotada por $[\ A\ ]^T$, se define como:

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

En otras palabras, el elemento a_{ij} de la transpuesta es igual al elemento a_{ji} de la matriz original, o $a_{ij} = a_{ji}$. La matriz transpuesta tiene una gran variedad de funciones en el álgebra matricial. Una ventaja simple es la de permitir escribir un vector columna como un vector fila. Por ejemplo, si:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{bmatrix}$$

entonces

$$[C]^T = [c_{11} \quad c_{21} \quad c_{31} \quad c_{41}]$$

en donde el superíndice T denota transposición.
Una matriz aumentada es el resultado de agregarle una columna (o más columnas) a la matriz original. Por ejemplo, supóngase que se tiene una matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Si se desea aumentar a esta matriz [A] una matriz identidad, entonces se obtiene una matriz 3 por 6 dimensional, dada por:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esta expresión tiene utilidad cuando se desea realizar un conjunto de operaciones idénticas sobre dos matrices. De esta forma, se pueden llevar a cabo las operaciones sobre una matriz aumentada en vez de hacerlo sobre dos matrices independientes.

3.2 GENERALIDADES SOBRE LOS SISTEMAS LINEALES Y LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN

En la forma general un sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas se puede representar como : (Demidovich & Maron, 1993)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = c_1,$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = c_2,$ (3.2)

. . . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = c_n,$

en donde las **a** son coeficientes de las incógnitas, las c son los términos independientes y las x son las incógnitas del sistema.

En forma simplificada el sistema (3.2) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{3.3}$$

Se llama solución del sistema de ecuaciones lineales (3.2) todo conjunto de los números α_1, α_2, . . . , α_n que, puestos en el lugar de las incógnitas x_1, x_2, . . . , x_n en las ecuaciones del sistema dado convierten todas estas ecuaciones en identidades.

En forma matricial el sistema de ecuaciones lineales (3.2) también se podrá representar como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina compatible si tiene una solución. Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, se considera incompatible (o contradictorio).

Un sistema compatible de ecuaciones lineales puede tener una o varias soluciones y se llama determinado si tiene una sola solución e indeterminado si tiene más de una solución.

Para facilitar la solución de un sistema de ecuaciones lineales a veces es necesario realizar las siguientes transformaciones elementales:

1. Intercambio de ecuaciones del sistema;

2. Multiplicación de ambos miembros de la ecuación de un sistema por cualquier número distinto de cero;

3. Adición (o sustracción) a ambos miembros de la ecuación de un sistema de los miembros respectivos de otra ecuación, multiplicados por cualquier número.

Se puede demostrar que las transformaciones elementales hacen pasar el sistema dado de ecuaciones a otro equivalente, que tiene exactamente la misma solución.

ISBN: 978-631-6557-41-4

3.3 MÉTODOS DE ELIMINACIÓN

3.3.1 Método De Eliminación Simple De Gauss

Este método está diseñado para resolver un conjunto de **m** ecuaciones con **n** incógnitas:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = c_1,$ (3.2.a)

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = c_2,$ (3.2.b)

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = c_3,$ (3.2.c)

. . . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = c_n,$ (3.2.n)

El método consiste en dos fases: la eliminación de las incógnitas y su solución mediante sustitución hacia atrás.

a. Eliminación hacia delante de las incógnitas. La primera fase reduce el conjunto de ecuaciones a un sistema triangular superior. El paso inicial del procedimiento consiste en dividir la primera ecuación (3.2a) por el coeficiente de la primera incógnita, a_{11}:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{c_1}{a_{11}} \qquad (3.2.a´)$$

A este procedimiento se le conoce como normalización y tiene como finalidad convertir el primer coeficiente de la ecuación normalizada en 1.

Luego se multiplica la ecuación normalizada (3.2.a´) por el primer coeficiente de la segunda ecuación (3.2.b), a_{21}:

$$a_{21}x_1 + (a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}})x_2 + \ldots + (a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}})x_n = a_{21}\frac{c_1}{a_{11}} \qquad (3.2.b´)$$

Nótese que el primer término de la primera ecuación es ahora idéntico al primer término de la segunda ecuación. Por consiguiente, se puede eliminar la primera incógnita de la segunda ecuación (3.2.b) restando la ecuación (3.2.b´) de la (3.2.b) para obtener

$$(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}})x_2 + \ldots + (a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}})x_n = c_2 - a_{21}\frac{c_1}{a_{11}} \qquad (3.3.b)$$

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n} = c'_2 \qquad (3.3.b)$$

en donde el apóstrofo indica que los elementos han cambiado sus valores originales. El proceso se repite hasta que se elimina la primera incógnita de las ecuaciones restantes. Por ejemplo, la

ISBN: 978-631-6557-41-4

ecuación normalizada (3.2.a´) se multiplica por a_{31} y el resultado se resta de la tercera ecuación (3.2.c) para obtener (3.2.c´) y así sucesivamente para el resto de las ecuaciones

$$a'_{32}\, x_2 + \ldots + a'_{3n}\, x_n = c'_3 \qquad (3.3.c)$$

Como resultado se obtiene el siguiente sistema modificado:

$$\begin{aligned}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n &= c_1 && (3.2.a)\\
a'_{22}\, x_2 + a'_{23}\, x_3 + \ldots + a'_{2n}\, x_n &= c'_2 && (3.3.b)\\
a'_{32}\, x_2 + a'_{33}\, x_3 + \ldots + a'_{3n}\, x_n &= c'_3 && (3.3.c)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &&\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &&\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &&\\
a'_{n2}\, x_2 + a'_{n3}\, x_3 + \ldots + a'_{nn}\, x_n &= c'_n && (3.3.n)
\end{aligned}$$

En seguida se repite el proceso para eliminar la segunda incógnita (x_2) de las ecuaciones (3.3.b) hasta la (3.3.n). Para hacerlo, la ecuación (3.3.b) se le normaliza, dividiéndola por el pivote a'_{22}

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 + \ldots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}} x_n = \frac{1}{a'_{22}} c'_2 \qquad (3.3.b´)$$

Multiplicando la ecuación normalizada por a'_{32} se obtiene

$$a'_{32} x_2 + a'_{32} \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 + \ldots + a'_{32} \frac{a'_{2n}}{a'_{22}} x_n = a'_{32} \frac{1}{a'_{22}} c'_2 \qquad (3.3.c´)$$

y restando el resultado a la ecuación (3.3.c) se elimina la segunda incógnita.

$$(a'_{33} - a'_{32} \frac{a'_{23}}{a'_{22}}) x_3 + \ldots + (a'_{3n} - a'_{32} \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}) x_n = (c'_3 - a'_{32} \frac{1}{a'_{22}} c'_2) \qquad (3.4.c)$$

$$a''_{33} x_3 + \ldots + a''_{3n} x_n = c''_3 \qquad (3.4.c)$$

Repitiendo el proceso con las ecuaciones restantes se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n &= c_1 && (3.2.a)\\
a'_{22}\, x_2 + a'_{23}\, x_3 + \ldots + a'_{2n}\, x_n &= c'_2 && (3.3.b)\\
a''_{33}\, x_3 + \ldots + a''_{3n}\, x_n &= c''_3 && (3.4.c)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &&\\
a''_{n3}\, x_3 + \ldots + a'''_{nn}\, x_n &= c'''_n && (3.4.n)
\end{aligned}$$

en donde el apóstrofe doble indica que los coeficientes se han modificado dos veces. El procedimiento se puede continuar usando las ecuaciones restantes como pivotales. La operación

ISBN: 978-631-6557-41-4

final de esta secuencia es la de usar la (n-1)-ésima ecuación para eliminar el término x_{n-1} de la n-ésima ecuación. En ese momento el sistema se transforma en un sistema triangular superior.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \qquad (3.2.a)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = c'_2 \qquad (3.3.b)$$

$$a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = c''_3 \qquad (3.4.c)$$

…………………… …………..

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = c_n^{(n-1)} \qquad (3.n.n)$$

b. Sustitución hacia atrás. La ecuación (3.n.n) se puede resolver para x_n:

$$x_n = \frac{c_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} \qquad (3.5)$$

Este resultado se puede sustituir en la (n-1)-ésima ecuación y resolverse ésta para x_{n-1}. El procedimiento se repite evaluando las x restantes, éste se puede representar mediante la fórmula:

$$x_i = \frac{c_i^{i-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{i-1} x_j}{a_{ii}^{i-1}} \qquad (3.6)$$

para i = n -1, n -2, ..., 1.
Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8$ (a)

$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$ (b)

$2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4$ (c)

$2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -7$ (d)

Solución

La matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

a. **Eliminación hacia adelante**

Se toman los coeficientes de la ecuación (a) y se dividen para el coeficiente de X_1 de la misma, obteniéndose la primera fila normalizada (d)

ISBN: 978-631-6557-41-4

[3 2 1 -1 8]/3 → 1 2/3 1/3 -1/3 8/3 (d)

Los coeficientes de (d) se multiplican por el coeficiente de X_1 de la ecuación (b) y se restan de la ecuación (b) obteniéndose

2 [1 2/3 1/3 -1/3 8/3] → [2 4/3 2/3 -2/3 16/3]

2	3	-1	-2	1
-2	-4/3	-2/3	2/3	-16/3
0	5/3	-5/3	-4/3	-13/3

Se puede notar que con este procedimiento se ha eliminado la incógnita x_1, porque ahora se tendrán los nuevos coeficientes de la ecuación (b) que serán

$5/3\ x_2 \quad -5/3\ x_3 \quad -4/3\ x_4 = -13/3$ (b)

Este mismo proceso se repite para el resto de las filas, esto es para obtener la nueva (c) y (d)

2	1	-4	-2	4
-2	-4/3	-2/3	2/3	-16/3
0	-1/3	-14/3	-4/3	-28/3

Se obtienen los nuevos coeficientes de la ecuación (c) que serán

$-1/3\ x_2 \quad -14/3\ x_3 \quad -4/3\ x_4 = -28/3$ (c)

2	-2	-1	4	-7
-2	-4/3	-2/3	2/3	-16/3
0	-10/3	-5/3	14/3	-37/3

Se puede notar que con este procedimiento se ha eliminado la incógnita X_1, porque ahora se tendrán los nuevos coeficientes de la ecuación (d) que serán

$5/3\ x_2 \quad -5/3\ x_3 \quad -4/3\ x_4 = -13/3$ (d)

Por lo tanto los coeficiente del sistema equivalente serán

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 5/3 & -5/3 & -4/3 & -13/3 \\ 0 & -1/3 & -14/3 & -4/3 & -28/3 \\ 0 & -10/3 & -5/3 & 14/3 & -37/3 \end{bmatrix}$$

Se toma la segunda fila de esta última matriz y se la normaliza

[5/3 -5/3 -4/3 -13/3]∗ 3/5 → 1 -1 -4/5 -13/5

Los coeficientes de la segunda fila normalizada se multiplican por el coeficiente de X_2 de la ecuación (b) y se restan de la ecuación (c) obteniéndose

-1/3∗ [1 -1 -4/5 -13/5] → [-1/3 1/3 4/15 -13/15]

-1/3	-14/3	-4/3	-28/3
1/3	-1/3	-4/15	-13/15
0	-5	-8/3	-51/5

Se puede notar que con este procedimiento se ha eliminado la incógnita X_2, porque ahora se tendrán los nuevos coeficientes de la ecuación (c) que serán

$- x_3 \quad -8/3\, x_4 = -51/5 \qquad$ (c)

Este mismo proceso se repite para el resto filas, esto es para obtener la nueva (d)

-10/3	-5/3	14/3	-37/3
10/3	-10/3	-40/15	-130/15
0	-5	2	-21

Por lo tanto los nuevos coeficiente del sistema equivalente serán

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & -1 & -4/5 & -13/5 \\ 0 & 0 & -5 & -8/5 & -51/5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -21 \end{bmatrix}$$

Se toma la tercera fila de esta última matriz y se la normaliza

[-5 -8/5 -51/5]∗ -1/5 → 1 8/25 51/25

ISBN: 978-631-6557-41-4

Los coeficientes de la tercera fila normalizada se multiplican por el coeficiente de X_3 de la ecuación (c) y se restan de la ecuación (d) obteniéndose

$$-5* [\,1 \quad 8/25 \quad 51/25\,] \rightarrow [\,-5 \quad -8/5 \quad -51/5\,]$$

-5	2	-21
5	8/5	51/5
0	18/5	-54/5

Se obtienen los nuevos coeficientes de la ecuación (d) que serán

$$18/5\,x_4 = -54/5 \qquad (d)$$

Por lo tanto los nuevos coeficiente del sistema equivalente serán

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & -1 & -4/5 & -13/5 \\ 0 & 0 & 1 & 8/25 & 51/25 \\ 0 & 0 & 0 & 18/5 & -54/5 \end{bmatrix}$$

b. **Sustitución hacia atrás**

Para la sustitución hacia atrás empezamos por la cuarta fila de la siguiente manera

$18/5\,x_4 = -54/5 \quad \rightarrow \quad x_4 = -3$

$x_3 + 8/25\,x_4 = 51/25 \quad \rightarrow \quad x_3 = 3$

$x_2 - x_3 - 4/5\,x_4 = -13/5 \quad \rightarrow \quad x_2 = -2$

$x_1 + 2/3\,x_2 + 1/3\,x_3 - 1/3\,x_4 = 8/3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$

3.3.2 Método De Gauss-Jordan

El método de Gauss- Jordan es una variación de la eliminación Gaussiana. La principal diferencia consiste en que en el método de Gauss-Jordan cuando se elimina una incógnita no sólo se elimina de las ecuaciones siguientes sino de todas las otras ecuaciones. De esta forma, el paso de eliminación genera una matriz identidad en vez de una matriz triangular. Por consiguiente, no es necesario emplear la sustitución hacia atrás para obtener la solución. (Lima Pisco et al., 2020)

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

ISBN: 978-631-6557-41-4

$3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 - x_4 = 8$ (a)

$2\,x_1 + 3\,x_2 - x_3 - 2\,x_4 = 1$ (b)

$2\,x_1 + x_2 - 4\,x_3 - 2\,x_4 = -4$ (c)

$2\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 = -7$ (d)

Solución

La matriz de coeficientes es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & -7 \end{array}\right]$$

Se procede de igual manera que en el método de eliminación simple de Gauss. Es decir, se toman los coeficientes de la ecuación (a) y se dividen para el coeficiente de x_1 de la misma, obteniéndose la primera fila normalizada (d)

[3 2 1 -1 8]/3 → 1 2/3 1/3 -1/3 8/3 (d)

Los coeficientes de (d) se multiplican por el coeficiente de x_1 de la ecuación (b) y se restan de la ecuación (b) obteniéndose

2 [1 2/3 1/3 -1/3 8/3] → [2 4/3 2/3 -2/3 16/3]

2	3	-1	-2	1
-2	-4/3	-2/3	2/3	-16/3
0	5/3	-5/3	-4/3	-13/3

Se puede notar que con este procedimiento se ha eliminado la incógnita x_1, porque ahora se tendrán los nuevos coeficientes de la ecuación (b) que serán

$5/3\,x_2 \quad -5/3\,x_3 \quad -4/3\,x_4 = -13/3$ (b)

Este mismo proceso se repite para el resto de las filas, esto es para obtener la nueva (c) y (d)

2	1	-4	-2	4
-2	-4/3	-2/3	2/3	-16/3
0	-1/3	-14/3	-4/3	-28/3

Se obtienen los nuevos coeficientes de la ecuación (c) que serán

ISBN: 978-631-6557-41-4

$-1/3\ x_2 \qquad -14/3\ x_3 \qquad -4/3\ x_4 = -28/3 \qquad (c)$

2	-2	-1	4	-7
-2	-4/3	-2/3	2/3	-16/3
0	-10/3	-5/3	14/3	-37/3

De la misma manera se obtienen los nuevos coeficientes de la ecuación (d) que serán

$5/3\ x_2 \qquad -5/3\ x_3 \qquad -4/3\ x_4 = -13/3 \qquad (d)$

Por lo tanto, los coeficientes del sistema equivalente serán

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 5/3 & -5/3 & -4/3 & -13/3 \\ 0 & -1/3 & -14/3 & -4/3 & -28/3 \\ 0 & -10/3 & -5/3 & 14/3 & -37/3 \end{array}\right]$$

Se toma la segunda fila de esta última matriz y se la normaliza

$[\ 5/3 \quad -5/3 \quad -4/3 \quad -13/3\ ] * 3/5 \quad \rightarrow \quad 1 \quad -1 \quad -4/5 \quad -13/5$

A diferencia del método de eliminación simple de Gauss, los coeficientes de la segunda fila normalizada se multiplican por el coeficiente de X_2 de la ecuación (a) y se restan de la ecuación (a) obteniéndose

$2/3 * [\ 1 \quad -1 \quad -4/5 \quad -13/5] \quad \rightarrow \quad [\ 2/3 \quad -2/3 \quad -8/15 \quad -26/15\ ]$

2/3	1/3	-1/3	8/3
-2/3	2/3	8/15	26/15
0	1	1/5	22/5

Se puede notar que con este procedimiento se ha eliminado la incógnita X_2, porque ahora se tendrán los nuevos coeficientes de la ecuación (c) que serán

$x_3 \qquad 1/5\ x_4 = 22/5 \qquad (a)$

Este mismo proceso se repite para el resto filas, esto es para obtener la nueva (c) y (d)

-1/3	-14/3	-4/3	-28/3
1/3	-1/3	-4/15	-13/15

ISBN: 978-631-6557-41-4

0	-5	-8/5	-51/5
-10/3	-5/3	14/3	-37/3
10/3	-10/3	-40/15	-130/15
0	-5	2	-21

Por lo tanto los nuevos coeficiente del sistema equivalente serán

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/5 & 22/5 \\ 0 & 1 & -1 & -4/5 & -13/5 \\ 0 & 0 & -5 & -8/5 & -51/5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -21 \end{array}\right]$$

Se toma la tercera fila de esta última matriz y se la normaliza

$[\,-5 \quad -8/5 \quad -51/5\,] * -1/5 \quad \rightarrow \quad 1 \quad 8/25 \quad 51/25$

Los coeficientes de la tercera fila normalizada se multiplican por el coeficiente de x_3 de la ecuación (a) y se restan de la ecuación (a) obteniéndose

$1 * [\,1 \quad 8/25 \quad 51/25\,] \rightarrow [\,1 \quad 8/5 \quad 51/5\,]$

1	1/5	22/5
-1	-8/5	-51/25
0	-3/25	59/25

Se puede notar que con este procedimiento se ha eliminado la incógnita x_3, porque ahora se tendrán los nuevos coeficientes de la ecuación (a) que serán

$$-3/25\, x_4 = 59/25 \qquad \text{(a)}$$

Este mismo proceso se repite para el resto filas, esto es para obtener la nueva (c) y (d)

-1	-4/5	-13/5
1	8/5	51/5
0	-12/25	-14/25

-5	2	-21

ISBN: 978-631-6557-41-4

5	8/5	51/5
0	18/5	-54/5

Por lo tanto los nuevos coeficientes del sistema equivalente serán

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -3/25 & 59/25 \\ 0 & 1 & 0 & -12/25 & -14/25 \\ 0 & 0 & 1 & 8/25 & 51/25 \\ 0 & 0 & 0 & 18/5 & -54/5 \end{array}\right]$$

Se toma la cuarta fila de esta última matriz y se la normaliza

$[\,18/5 \quad -54/5\,] * 5/18 \;\rightarrow\; 1 \quad -3$

Los coeficientes de la tercera fila normalizada se multiplican por el coeficiente de X_4 de la ecuación (a) y se restan de la ecuación (a) obteniéndose

$3/25 * [\,1 \quad -3\,] \;\rightarrow\; [\,3/25 \quad -9/25\,]$

-3/25	59/25
3/25	-9/25
0	2

Este mismo proceso se repite para el resto filas, esto es para obtener la nueva (c) y (d)

-12/25	-14/25
12/25	-36/25
0	-2

8/25	51/25
-8/25	24/25
0	18/5

Por lo tanto, los nuevos coeficientes del sistema equivalente serán

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

De donde se deduce que los valores de las incógnitas son

$x_1 = 2$ $x_3 = 3$

$x_2 = -2$ $x_4 =- 3$

Este procedimiento analítico que conlleva operaciones con fracciones podemos solucionarlo paso a paso en una hoja de Excel, para evitar problemas con posibles errores en las fracciones:

R1	3	2	1	-1	8
R2	2	3	-1	-2	1
R3	2	1	-4	-2	-4
R4	2	-2	-1	4	-7

Paso 1

	R1=R1/3				
R1	1	2/3	1/3	- 1/3	2 2/3
R2	2	3	-1	-2	1
R3	2	1	-4	-2	-4
R4	2	-2	-1	4	-7

Paso 2

	R2=2*R1-R2				
	R3=2*R1-R3				
	R4=2*R1-R4				
R1	1	2/3	1/3	- 1/3	2 2/3
R2	0	-1 2/3	1 2/3	1 1/3	4 1/3
R3	0	1/3	4 2/3	1 1/3	9 1/3
R4	0	3 1/3	1 2/3	-4 2/3	12 1/3

Paso 3

	R2=R2/(-1 2/3)				
R1	1	2/3	1/3	- 1/3	2 2/3
R2	0	1	-1	- 4/5	-2 3/5
R3	0	1/3	4 2/3	1 1/3	9 1/3
R4	0	3 1/3	1 2/3	-4 2/3	12 1/3

Paso 4

ISBN: 978-631-6557-41-4

	R1=R1-(2/3)*R2				
	R3=R3-(1/3)*R2				
	R4=R4-(3 1/3)*R2				
R1	1	0	1	1/5	4 2/5
R2	0	1	-1	- 4/5	-2 3/5
R3	0	0	5	1 3/5	10 1/5
R4	0	0	5	-2	21

Paso 5

	R3=R3/5				
R1	1	0	1	1/5	4 2/5
R2	0	1	-1	- 4/5	-2 3/5
R3	0	0	1	1/3	2
R4	0	0	5	-2	21

Paso 6

	R1=R1-R3				
	R2=R2+R3				
	R4=R4-5*R3				
R1	1	0	0	- 1/8	2 1/3
R2	0	1	0	- 1/2	- 5/9
R3	0	0	1	1/3	2
R4	0	0	0	-3 3/5	10 4/5

Paso 7

	R4=R4/(- 3/5)				
R1	1	0	0	- 1/8	2 1/3
R2	0	1	0	- 1/2	- 5/9
R3	0	0	1	1/3	2
R4	0	0	0	1	-3

Paso 8

	R1=R1+(1/8)*R4				
	R2=R2+(1/2)*R4				
	R3=R3-(1/3)*R4				
R1	**1**	0	0	0	**2**
R2	0	**1**	0	0	**-2**
R3	0	0	**1**	0	**3**
R4	0	0	0	**1**	**-3**

3.4 Métodos iterativos

3.4.1 Método de Gauss-Seidel.

Es el método iterativo más usado. Supóngase que se ha dado un conjunto de n ecuaciones:

$$[A][x]=[C] \tag{3.7}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

si los elementos de la diagonal son diferentes de cero, la primera ecuación se puede resolver para x_1, la segunda para x_2, etc., lo que lleva a:

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3 - \ldots - a_{1n}\,x_n}{a_{11}} \qquad (3.8.a)$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}\,x_1 - a_{23}\,x_3 - \ldots - a_{2n}\,x_n}{a_{22}} \qquad (3.8.b)$$

. . . .

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}\,x_1 - a_{n2}\,x_2 - \ldots - a_{n,n-1}\,x_{n-1}}{a_{nn}} \qquad (3.8.n)$$

Ahora, se puede empezar el proceso de solución usando un valor inicial para las x. Podemos empezar haciendo que todas las x valgan cero. Estos ceros se pueden sustituir en la ecuación (3.8.a), que se puede usar para calcular un nuevo valor de $x_1 = c_1 / a_{11}$. Luego, se sustituye el nuevo valor de x_1, con x_3, . . . , x_n aun en cero, en la ecuación (3.8.b) con la cual se calcula un nuevo valor de x_2. Este proceso se repite en cada una de las ecuaciones hasta llegar a la ecuación (3.8.n) la cual permite determinar un nuevo valor de x_n.

En seguida en una nueva iteración, se regresa a la primera ecuación y se repite todo el proceso hasta que la solución converja bastante cerca de los valores reales. La convergencia se puede verificar usando el criterio:

$$\in_{a,i} = \left| \frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j} \right| x100\% \quad < \quad \in_s \qquad (3.9)$$

para toda i en donde j y j –1 denotan la iteración actual y la anterior.

Ejemplo.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con un criterio de paro de $\in_s = 10\ \%$:

$10\ x_1 - 3\ x_2 + 6\ x_3 = 24.5$
$x_1 + 8\ x_2 - 2\ x_3 = -9$
$-2\ x_1 + 4\ x_2 - 9\ x_3 = -50$

Solución

En primer lugar, se despejan cada una de las variables sobre la diagonal:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} \qquad (a)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} \qquad \text{(b)}$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} \qquad \text{(c)}$$

Suponiendo que x_2 y x_3 son cero, la ecuación (a) puede usarse para calcular:

$$x_1 = \frac{24.5}{10} = 2.45$$

Este valor junto con el de $x_3 = 0$, se puede sustituir en la ecuación (b), obteniéndose:

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{0 - 2.45 - 9}{8} = -1.43125$$

La primera iteración se completa sustituyendo los valores de x_1 y x_2 calculados en la ecuación (c), obteniéndose:

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(2.45) + 4(-1.43)}{9} = 4.375$$

En la segunda iteración, se repite el mismo proceso obteniéndose:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} = \frac{24.5 + 3(-1.43) - 6(4.38)}{10} = -0.604$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{2(4.38) - (-0.604) - 9}{8} = 0.0443$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(-0.61) + 4(0.0443)}{9} = 5.709$$

En la tercera iteración, se tiene:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} = \frac{24.5 + 3(0.0443) - 6(5.709)}{10} = -0.962$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{2(5.709) - (-0.962) - 9}{8} = 0.422$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(-0.962) + 4(0.422)}{9} = 5.957$$

En la cuarta iteración de igual forma:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} = \frac{24.5 + 3(0.422) - 6(5.957)}{10} = -0.997$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{2(5.957) - (-0.997) - 9}{8} = 0.489$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(-0.997) + 4(0.489)}{9} = 5.995$$

El método, por lo tanto, converge a la solución real. Comprobamos para determinar si las iteraciones deben continuar o debemos parar, considerando un criterio de paro del $\in_s = 10$ %.

$$\in_{a,i} = \left| \frac{x_i^{j-1} - x_i^j}{x_i^j} \right| x100\% \quad < \quad \in_s$$

$$\in_{a,1} = \left| \frac{0.99 - 0.96}{0.99} \right| x100 = 3.03 \quad < \quad \in_s = 10$$

$$\in_{a,2} = \left| \frac{0.49 - 0.42}{0.49} \right| x100 = 14.28 \quad > \quad \in_s = 10$$

$$\in_{a,3} = \left| \frac{5.99 - 5.95}{5.99} \right| x100 = 0.67 \quad < \quad \in_s = 10$$

Como el error de x_2 es mayor que el 10 % debemos continuar con las iteraciones.

3.4.2 Método De Jacobi

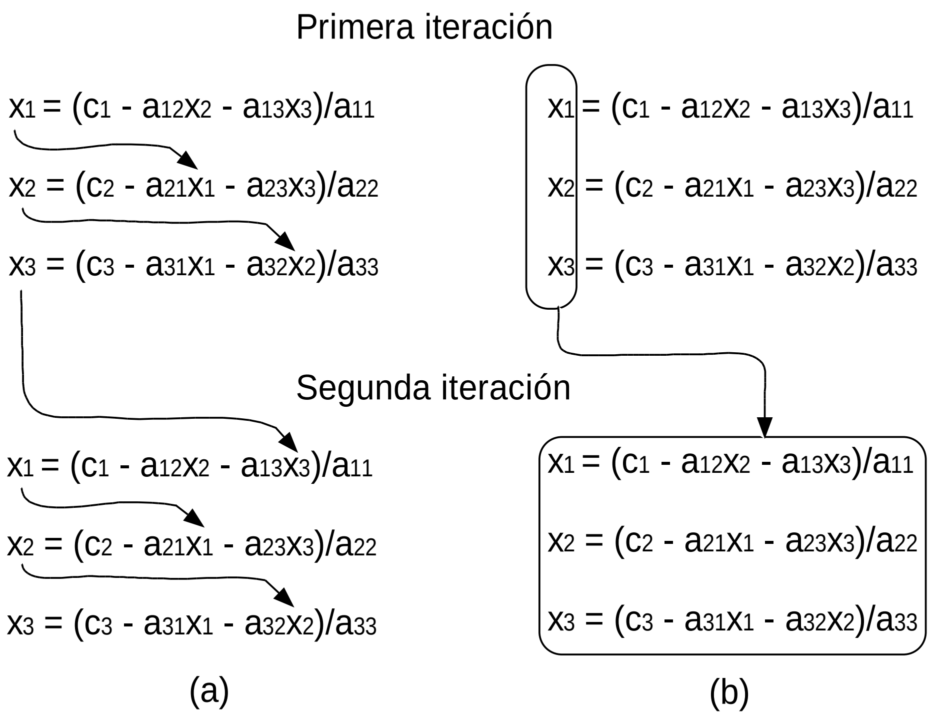


Figura 3.1 Esquema de cálculo para los métodos iterativos
(a) Método de Gauss-Seidel. (b) Método de Jacobi

Se supone que se tiene un conjunto de n ecuaciones:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$[A][x]=[C] \tag{3.10}$$

si los elementos de la diagonal son diferentes de cero, la primera ecuación se puede resolver para x_1, la segunda para x_2, etc., lo que lleva a:

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}\,x_2 - a_{13}\,x_3 - \ldots - a_{1n}\,x_n}{a_{11}} \tag{3.11.a}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}\,x_1 - a_{23}\,x_3 - \ldots - a_{2n}\,x_n}{a_{22}} \tag{3.11.b}$$

. . . .

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}\,x_1 - a_{n2}\,x_2 - \ldots - a_{n,n-1}\,x_{n-1}}{a_{nn}} \tag{3.11.n}$$

Ahora, se puede empezar el proceso de solución usando un valor inicial para las x. Podemos empezar haciendo que todas las x valgan cero. Estos ceros se pueden sustituir en la ecuación (3.11.a), que se puede usar para calcular un nuevo valor de $x_1 = c_1 / a_{11}$. Luego, se sustituye el nuevo valor de x_1, con $x_3, \ldots, x_n$ aun en cero, en la ecuación (3.11.b) con la cual se calcula un nuevo valor de x_2. Este proceso se repite en cada una de las ecuaciones hasta llegar a la ecuación (3.11.n) la cual calcula un nuevo valor de x_n.

En una nueva iteración se regresa a la primera ecuación y se repite todo el proceso hasta que la solución converja bastante cerca de los valores reales. La convergencia se puede verificar en base al mismo criterio usado en Gauss-Seidel.

Ejemplo.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con un criterio de paro de $\in_s = 10\ \%$:

$10\ x_1 - 3\ x_2 + 6\ x_3 = 24.5$
$x_1 + 8\ x_2 - 2\ x_3 = -9$
$-2\ x_1 + 4\ x_2 - 9\ x_3 = -50$

Solución

En primer lugar, se despejan cada una de las variables sobre la diagonal:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} \tag{a}$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} \tag{b}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} \qquad \text{(c)}$$

Para la primera iteración en la ecuación (a) se asume que x_2 y x_3 son cero, con lo cual el valor resultante de x_1 es

$$x_1 = \frac{24.5}{10} = 2.45$$

En la ecuación (b), se asume que x_3 y x_1 son cero y el valor de x_2 es

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{-9}{8} = -1.125$$

En la ecuación (c), de la misma forma se asume que x_1 y x_2 son cero y el valor de x_3 es

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50}{9} = 5.555556$$

En la segunda iteración, se repite el mismo proceso trabajando con los valores obtenidos en la iteración anterior, es decir

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} = \frac{24.5 + 3(-1.125) - 6(5.555556)}{10} = -1.220833$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{2(5.555556) - (2.45) - 9}{8} = -0.042361$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(2.45) + 4(-1.125)}{9} = 4.511111$$

En la tercera iteración, se tiene:

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} = \frac{24.5 + 3(-0.042361) - 6(4.511111)}{10} = -0.269375$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{2(4.511111) - (-1.220833) - 9}{8} = 0.155382$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(-1.220833) + 4(-0.042361)}{9} = 5.808024$$

En la cuarta iteración de igual forma:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$x_1 = \frac{24.5 + 3x_2 - 6x_3}{10} = \frac{24.5 + 3(0.155382) - 6(5.808024)}{10} = -0.988200$$

$$x_2 = \frac{2x_3 - x_1 - 9}{8} = \frac{2(5.808024) - (-0.269375) - 9}{8} = 0.360678$$

$$x_3 = \frac{50 - 2x_1 + 4x_2}{9} = \frac{50 - 2(-0.269375) + 4(0.155382)}{9} = 5.684475$$

El método, por lo tanto, converge a la solución real. En la iteración número 29 se tendrá exactamente que $x_1 = -1$, $x_2 = 0.5$ y $x_3 = 6$

3.5 MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN DE MATRICES

3.5.1 Método De La Raíz Cuadrada

Se tiene que una matriz tiene la forma

$$Ax = c$$

Se factora la matriz A, es decir se la descompone en dos matrices L y L^T :

$$A = L * L^T$$

Donde L es una matriz triangular superior

L^T es la transpuesta de la matriz triangular

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[L^T] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{12} & L_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{1n} & L_{2n} & \dots & L_{mn} \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para obtener las fórmulas para determinar cada uno de los elementos de la matriz L, se multiplica la matriz L por la matriz transpuesta L^T e se iguala al elemento correspondiente de la matriz A.

El primer elemento se calcula por

$L_{11}*L_{11} = a11$ de donde $L_{11} = \sqrt{a_{11}}$

Los elementos de la primera fila se calculan por

$$L_{1j} = \frac{a_{1j}}{L_{1i}} \qquad i = 1 \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

Los elementos diagonales se calculan por

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki}^2}$$

El resto de los elementos se calcula por

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ki} L_{kj}}{L_{ii}}$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 &= 29 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 12x_4 &= -20 \end{aligned}$$

Solución

Se determina la primera diagonal de la matriz L

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2.236068$$

Se determina el resto de los elementos de la primera fila de la matriz L

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$l_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-3}{2.236068} = -1.341641$$

$$l_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{2}{2.236068} = 0.894427$$

$$l_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{1}{2.236068} = 0.447214$$

Se determina el segundo elemento de la diagonal y el resto de los elementos para la próxima diagonal

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2} = \sqrt{4 - (-1.341641)^2} = 1.48324$$

$$l_{23} = \frac{a_{23} - l_{12}\, l_{13}}{l_{22}} = \frac{1 - (-1.341641)(0.894427)}{1.483239} = 1.483240$$

Se determina el tercer elemento de la diagonal

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(l_{13}^2 + l_{23}^2\right)} = \sqrt{5 - \left[(0.894427)^2 + (1.483240)^2\right]} = 1.414214$$

Se determina el resto de los elementos para la última diagonal

$$l_{24} = \frac{a_{24} - l_{12}\, l_{14}}{l_{22}} = \frac{2 - (-1.341641)(0.447214)}{1.483239} = 1.752920$$

$$l_{34} = \frac{a_{34} - (l_{13}\, l_{14} + l_{23}\, l_{24})}{l_{33}} = \frac{-1 - \left[(0.894427)(0.447214) + (1.483240)(1.752920)\right]}{1.483239} = -2.828427$$

Se determina la última diagonal

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - \left(l_{14}^2 + l_{24}^2 + l_{34}^2\right)} = \sqrt{12 - \left[(0.447214)^2 + (1.752920)^2 + (-2.828427)^2\right]} = 0.852803$$

Se obtienen las matrices L y su transpuesta L^T

$$L = \begin{bmatrix} 2.236068 & -1.341641 & 0.894427 & 0.447214 \\ 0 & 1.483239 & 1.483240 & 1.752920 \\ 0 & 0 & 1.414214 & -2.828427 \\ 0 & 0 & 0 & 0.852803 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 2.236068 & 0 & 0 & 0 \\ -1.341641 & 1.483239 & 0 & 0 \\ 0.894427 & 1.483240 & 1.414214 & 0 \\ 0.447214 & 1.752920 & -2.828427 & 0.852803 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se plantea el primer sistema L^T y = c

$$\begin{bmatrix} 2.236068 & 0 & 0 & 0 \\ -1.341641 & 1.483239 & 0 & 0 \\ 0.894427 & 1.483240 & 1.414214 & 0 \\ 0.447214 & 1.752920 & -2.828427 & 0.852803 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 29 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Se resuelve de la siguiente manera:

$$2.236068\,y_1 = 7 \qquad \rightarrow \qquad y_1 = 3.130495$$

$$-1.341641\,y_1 + 1.483239\,y_2 = 6 \qquad \rightarrow \qquad y_2 = 6.876842$$

$$0.894427\,y_1 + 1.483240\,y_2 + 1.414214\,y_3 = 29 \qquad \rightarrow \qquad y_3 = 11.313701$$

$$0.447214\,y_1 + 1.752920\,y_2 - 2.828427\,y_3 + 0.852803\,y_4 = -20 \qquad \rightarrow \qquad y_4 = -1.705643$$

Se plantea el segundo sistema L x = y

$$\begin{bmatrix} 2.236068 & -1.341641 & 0.894427 & 0.447214 \\ 0 & 1.483239 & 1.483240 & 1.752920 \\ 0 & 0 & 1.414214 & -2.828427 \\ 0 & 0 & 0 & 0.852803 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.130495 \\ 6.876842 \\ 11.313701 \\ -1.705643 \end{bmatrix}$$

$$0.852803\,x_4 = -1.705643 \qquad \rightarrow \qquad x_4 = -2$$

$$1.414214\,x_3 - 2.828427\,x_4 = 11.313701 \qquad \rightarrow \qquad x_3 = 4$$

$$1.483240\,x_2 + 1.483240\,x_3 + 1.752920\,x_4 = 6.876842 \qquad \rightarrow \qquad x_2 = 3$$

$$2.236068\,x_1 - 1.341641\,x_2 + 0.894427\,x_3 + 0.447214\,x_4 = 3.130495 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 2$$

3.5.2 Método De Choleski

Se tiene que una matriz tiene la forma

$$Ax = b$$

Se factora la matriz A, es decir se la descompone en dos matrices B y C :

$$A = B * C$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Donde B es una matriz triangular inferior

C es una matriz triangular superior con diagonal 1.

$$[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar los elementos de la matriz B y C, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} b_{11}.1 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = a_{11} \\ b_{21}.1 + b_{22}.0 + 0.0 + 0.0 = a_{21} \\ b_{31}.1 + b_{32}.0 + b_{33}.0 + 0.0 = a_{31} \\ b_{41}.1 + b_{42}.0 + b_{43}.0 + b_{44}.0 = a_{41} \end{gathered}$$

Entonces la primera columna de B es la misma de A. Generalizando tenemos:

$$b_{ij} = a_{ij} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

$$\begin{gathered} b_{11}.c_{12} + 0.1 + 0.0 + 0.0 = a_{12} \\ b_{21}.c_{12} + b_{22}.1 + 0.0 + 0.0 = a_{22} \\ b_{31}.c_{12} + b_{32}.1 + b_{33}.0 + 0.0 = a_{32} \\ b_{41}.c_{12} + b_{42}.1 + b_{43}.0 + b_{44}.0 = a_{42} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b_{11}.1 + 0.0 + 0.0 + 0.0 = a_{13} \\ b_{21}.1 + b_{22}.0 + 0.0 + 0.0 = a_{23} \\ b_{31}.1 + b_{32}.0 + b_{33}.0 + 0.0 = a_{33} \\ b_{41}.1 + b_{42}.0 + b_{43}.0 + b_{44}.0 = a_{43} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b_{11}.c_{14} + 0.c_{24} + 0.c_{34} + 0.1 = a_{14} \\ b_{21}.c_{14} + b_{22}.c_{24} + 0.c_{34} + 0.1 = a_{24} \\ b_{31}.c_{14} + b_{32}.c_{24} + b_{33}.c_{34} + 0.1 = a_{34} \\ b_{41}.c_{14} + b_{42}.c_{24} + b_{43}.c_{34} + b_{44}.1 = a_{44} \end{gathered}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

La primera fila de la matriz C:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} \qquad j = 2, 3, \ldots, n$$

La segunda columna de la matriz B:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}$$

La segunda fila de la matriz C:

$$c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj}$$

Y así sucesivamente.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 7 \\ 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Solución

Se determina la primera columna de la matriz B

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} = 4 \\ b_{21} &= a_{21} = 7 \\ b_{31} &= a_{31} = 3 \\ b_{41} &= a_{41} = 2 \end{aligned}$$

Se determina la primera fila de la matriz C

$$c_{12} = \frac{a_{12}}{b_{11}} = \frac{-3}{4} = -0.75$$

$$c_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$c_{14} = \frac{a_{14}}{b_{11}} = \frac{-5}{4} = -1.25$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se determina la segunda columna de la matriz B

$$b_{22} = a_{22} - b_{21}\,c_{12} = -2 - (7)(-0.75) = 3.25$$
$$b_{32} = a_{32} - b_{31}\,c_{12} = -2 - (3)(-0.75) = 0.25$$
$$b_{42} = a_{42} - b_{41}\,c_{12} = 3 - (2)(-0.75) = 4.5$$

Se determina la segunda fila matriz C

$$c_{23} = \frac{1}{b_{22}}\left(a_{23} - b_{21}\,c_{13}\right) = \frac{1}{3.25}\left[-3 - (7)(0.25)\right] = -1.461538$$
$$c_{24} = \frac{1}{b_{22}}\left(a_{24} - b_{21}\,c_{14}\right) = \frac{1}{3.25}\left[-2 - (7)(-1.25)\right] = 2.076923$$

Se determina la tercera columna de la matriz B

$$b_{33} = a_{33} - \left(b_{31}\,c_{13} + b_{32}\,c_{23}\right) = 5 - \left[(3)(0.25) + (0.25)(-1.461538)\right] = 4.615385$$
$$b_{43} = a_{43} - \left(b_{41}\,c_{13} + b_{42}\,c_{23}\right) = 5 - \left[(2)(0.25) + (4.5)(-1.461538)\right] = 11.076921$$

Se determina la tercera fila matriz C

$$c_{34} = \frac{1}{b_{33}}\left[a_{34} - (b_{31}\,c_{14} + b_{32}\,c_{24}\right] = \frac{1}{4.615385}\left[-2 - \left((3)(-1.25) + (0.25)(2.076923)\right)\right] = 0.266667$$

Se determina la cuarta columna de la matriz B

$$b_{44} = a_{44} - \left(b_{41}\,c_{14} + b_{42}\,c_{24} + b_{43}\,c_{34}\right) = 4 - \left[(2)(-1.25) + (4.5)(2.076923) + (11.076921)(0.266667\right]$$
$$b_{44} = -5.800002$$

Se obtienen las matrices B y C

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3.25 & 0 & 0 \\ 3 & 0.25 & 4.615365 & 0 \\ 2 & 4.5 & 11.076921 & -5.800002 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0.75 & 0.25 & -1.25 \\ 0 & 1 & -1.461538 & 2.076923 \\ 0 & 0 & 1 & 0.266667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se plantea el primer sistema B y = b

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3.25 & 0 & 0 \\ 3 & 0.25 & 4.615365 & 0 \\ 2 & 4.5 & 11.076921 & -5.800002 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Se resuelve de la siguiente manera:

$$4y_1 = 7 \quad \rightarrow \quad y_1 = 1.75$$

$$7y_1 + 3.25y_2 = 6 \quad \rightarrow \quad y_2 = -1.923077$$

$$3y_1 + 0.25y_2 + 4.615385y_3 = 0 \quad \rightarrow \quad y_3 = -1.033333$$

$$2y_1 + 4.5y_2 + 11.076921y_3 - 5.800002y_4 = -5 \quad \rightarrow \quad y_4 = -2$$

Se plantea el segundo sistema C x = y

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.75 & 0.25 & -1.25 \\ 0 & 1 & -1.461538 & 2.076923 \\ 0 & 0 & 1 & 0.266667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ -1.923077 \\ -1.033333 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$1x_4 = -2 \quad \rightarrow \quad x_4 = -2$$

$$x_3 + 0.266667x_4 = -1.033333 \quad \rightarrow \quad x_2 = -0.5$$

$$x_2 - 1.461538x_3 + 2.076923x_4 = -1.923077 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1.5$$

$$x_1 - 0.75x_2 + 0.25x_3 - 1.25x_4 = 1.75 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0.5$$

3.6 ALGORITMO DE THOMAS

Se utiliza para la resolución de sistemas tridiagonales

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

El procedimiento para seguir es el siguiente:

1. Se inicializan dos nuevas variables: b´1 = b1 y d`1 = d1
2. Se determinan los coeficientes Ri, b´i y d´i para i = 2,3,….,n, mediante las siguientes expresiones

$$R_i = \frac{a_i}{b'_{i-1}} \qquad b'_i = b_2 - R_2\ c_1 \qquad d'_2 = d_2 - R_2\ d'_1$$

3. Se determina la última incógnita mediante la siguiente relación

$$x_n = \frac{d'_n}{b'_n}$$

4. Se determina el resto de las incógnitas en orden decreciente mediante la siguiente relación

$$x_{n-1} = \frac{(d'_{n-1} - c_{n-1} * x_n)}{b'_{n-1}}$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 15 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Solución

1. Se inicializan las nuevas variables: : b´1 = 4 y d`1 = 16

2, Se determinan las contantes Ri, b´i y d´i para i = 2,3,….,n.

Para i = 2

$$R_2 = \frac{a_2}{b'_1} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad b'_2 = b_2 - R_2 * c_1 = 3 - (0{,}25)(2) = 2{,}5$$

$$d'_2 = d_2 - R_2 * d'_1 = 13 - (0{,}25)(16) = 9$$

Para i = 3

$$R_3 = \frac{a_3}{b'_2} = \frac{3}{2{,}5} = 1{,}2 \qquad b'_3 = b_3 - R_3 * c_2 = 5 - (1{,}2)(-1) = 6{,}2$$

$$d'_3 = d_3 - R_3 * d'_2 = 15 - (1{,}2)(9) = 4{,}2$$

Para i = 4

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$R_4 = \frac{a_4}{b_3'} = \frac{2}{6,2} = 0,32258 \qquad b_4' = b_4 - R_4 * c_3 = 3 - (0,32258)(1) = 2,67742$$

$$d_4' = d_4 - R_4 * d_3' = 2 - (0,32258)(4,2) = 0,645164$$

Para i = 4

$$R_5 = \frac{a_5}{b_4'} = \frac{1}{2,67742} = 0,373494 \qquad b_5' = b_5 - R_5 * c_4 = 4 - (0,373494)(2) = 3,253012$$

$$d_5' = d_5 - R_5 * d_4' = 10 - (0,373494)(0,645164) = 9,759035$$

4. Se obtiene la última incógnita

$$x_5 = \frac{d_5'}{b_5'} = \frac{9,759035}{3,253012} = 3$$

5. Se obtiene el resto de las incógnitas en orden decreciente (n = 5)

$$x_4 = \frac{(d_4' - c_4 * x_5)}{b_4'} = \frac{(0,645164 - 2*3)}{2,67742} = -2$$

$$x_3 = \frac{(d_3' - c_3 * x_4)}{b_3'} = \frac{(4,2 - 1*(-2))}{6,2} = 1$$

$$x_2 = \frac{(d_2' - c_2 * x_3)}{b_2'} = \frac{(9 - (-1)*1)}{2,5} = 4$$

$$x_1 = \frac{(d_1' - c_1 * x_2)}{b_1'} = \frac{(16 - 2*4)}{4} = 2$$

3.7. PROBLEMAS DE APLICACIÓN A LA INGENIERÍA

1. Calcular los esfuerzos a que están sometidos los elementos de la siguiente armadura. (Guerra A. et al., 2023)

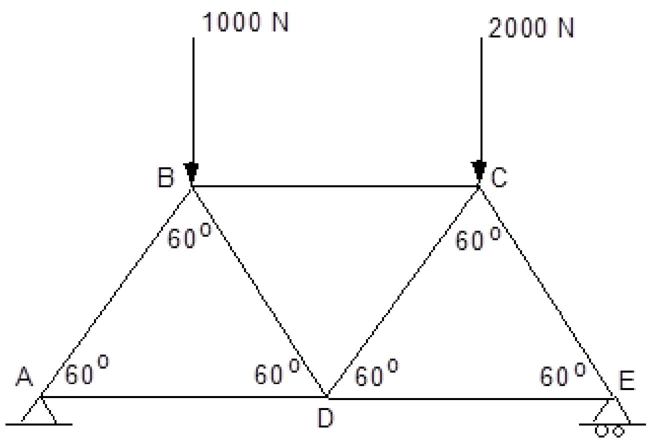


Figura 3.2. Armadura

ISBN: 978-631-6557-41-4

Solución
Se realiza el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los nodos

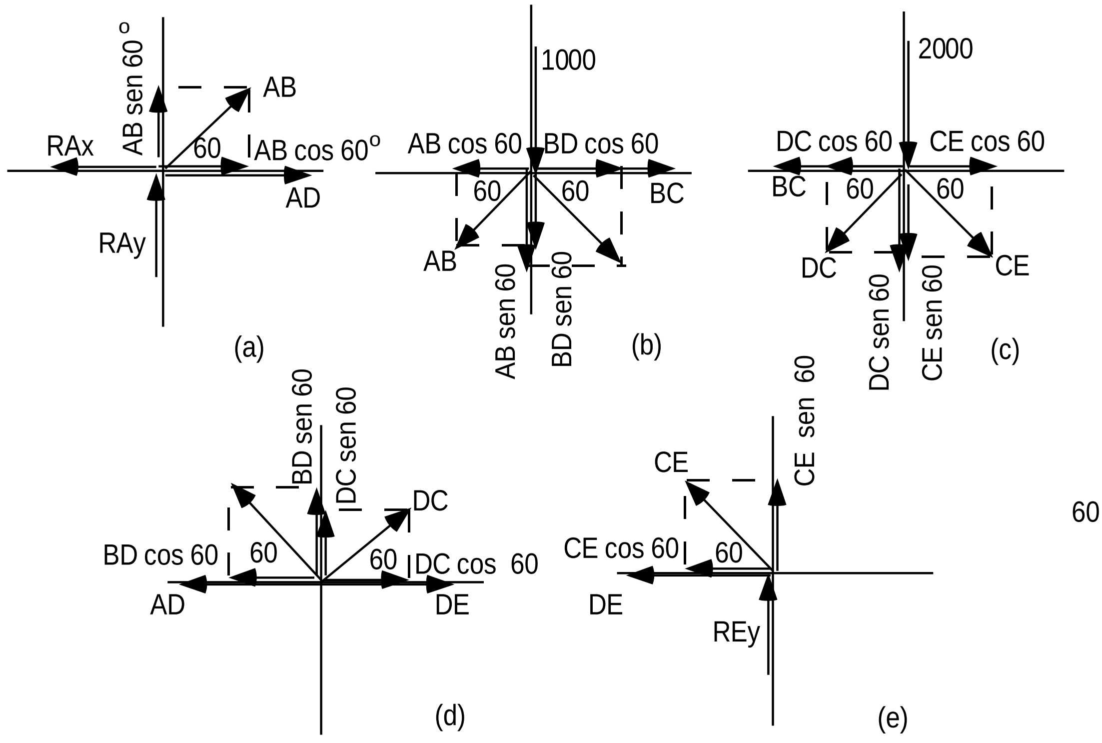


Figura 3.3. Diagramas de cuerpo libre de los diferentes nodos

Haciendo sumatoria de fuerzas en x y y se tiene:

Nodo A (figura 3.3.a)

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

$$AD + AB\cos 60^o = 0 \qquad RA_y + AB\,\text{sen}\,60^o = 0$$

Nodo B (figura 3.3.b)

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

$$BC + BD\cos 60^O - AB\cos 60^o = 0 \qquad AB\,\text{sen}\,60^o + BD\,\text{sen}\,60^o = -1000$$

Nodo C (figura 3.3.c)

ISBN: 978-631-6557-41-4

$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$

$BC + DC\cos 60^o - CE\cos 60^o = 0$ $DC\,\text{sen}\,60^o + CE\,\text{sen}\,60^o = -2000$

Nodo D (figura 3.3.d)

$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$

$DE + DC\cos 60^o - AD - BD\cos 60^o = 0$ $BD\,\text{sen}\,60^o + DC\,\text{sen}\,60^o = 0$

Nodo E (figura 3.3.e)

$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$

$DE + CE\cos 60^o = 0$ $CE\,\text{sen}\,60^o + RE_y = 0$

Se plantea el sistema de ecuaciones, tomando en cuenta los coeficientes de cada uno de los elementos de la armadura.

$$\begin{bmatrix} AB & AD & BC & BD & CD & CE & DE & RAx & RAy & REy \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.866 & 0 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.866 & 0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.866 & 0.866 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB \\ AD \\ BC \\ BD \\ CD \\ CE \\ DE \\ RAx \\ RAy \\ REy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \\ -2000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AB = -1443,42 AD = 721,709 BC = -866,051
BD = 288,684 CD = - 288,684 CE = -2020,79
DE = 1010,393 $RA_x = 0$ $RA_y = 1250$
$RE_y = 1750$

Se debe observar que, al estar el sistema de ecuaciones en la notación matricial, el método más eficiente es mediante la matriz inversa. Los siguientes ejercicios están resueltos de la misma manera.

ISBN: 978-631-6557-41-4

2. En el sistema mostrado en la figura 3.4, determinar la tensión T y R en las cuerdas y la aceleración

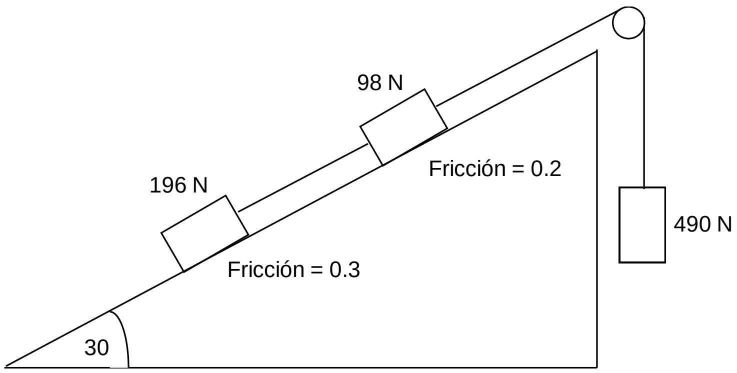


Figura 3.4.Tres bloques conectados por cuerdas de peso despreciables

Solución

Se construye el diagrama de cuerpo libre para cada bloque y se tiene

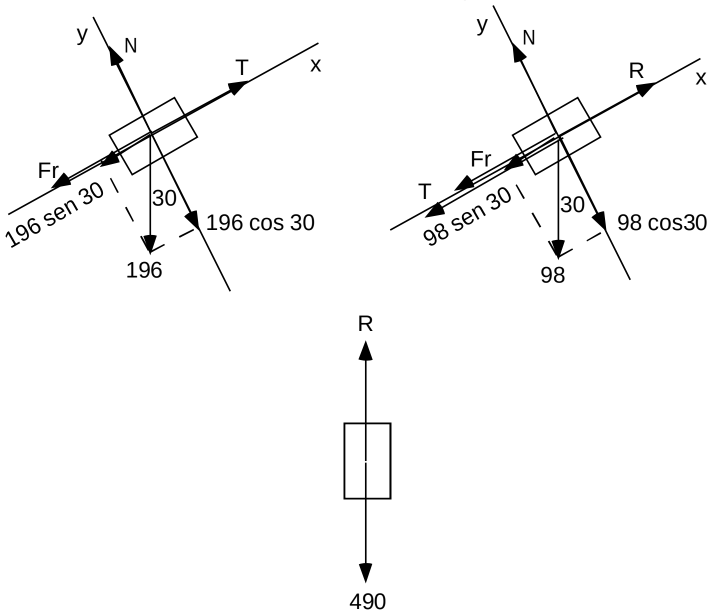


Figura 3.5. Diagramas de cuerpo libre de cada bloque

Para el bloque de 196 Newtons.

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 196\cos 30^o = 0$$

$$N = 169.7498\ Newtons$$

$$Fr = \mu N = 0.3(169.7498) = 50.9249\ Newtons$$

$$\sum F_x = m\,a$$

$$T - Fr - 196\ \text{sen}\,30^o = \frac{196}{9.8}a$$

$$T - 50.9249 - 98 = 20\,a$$

$$20\,a - T = -148.9249$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para el bloque de 98 Newtons.

$$\sum F_y = 0$$

$$N - 98\cos 30^o = 0 \qquad\qquad Fr = \mu N = 0.2(84.8705) = 16.9741\,Newtons$$
$$N = 84.8705\,Newtons$$

$$\sum F_x = m\,a$$

$$R - T - Fr - 98\,\text{sen}\,30^o = \frac{98}{9.8}a \qquad\qquad 10a + T - R = -65.9741$$
$$R - T - 16.9741 - 49 = 10\,a$$

Para el bloque de 490 Newtons.

$$\sum F_y = m\,a$$

$$490 - R = \frac{490}{9.8}a \qquad\qquad 50a + R = 490$$
$$490 - R = 50\,a$$

Se plantea el sistema de ecuaciones tomando los coeficientes de a, T y R respectivamente para formar la matriz de las incógnitas

$$\begin{bmatrix} 20 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & -1 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ T \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -148.9249 \\ -65.9741 \\ 490 \end{bmatrix}$$

$$a = 3.4387\,m/seg.^2$$
$$T = 217.7001\,Newtons$$
$$R = 318.0619\,Newtons$$

3. En el circuito mostrado en la figura 3.6.,determinar las corrientes y voltajes

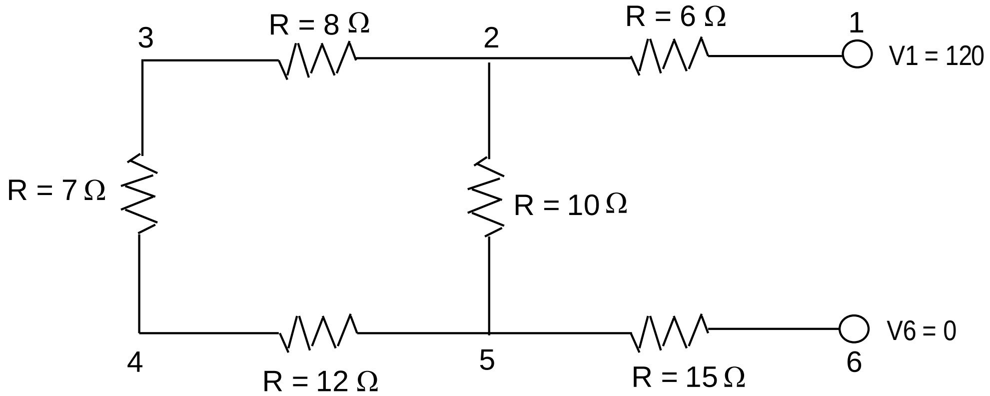


Figura 3.6. Circuito eléctrico

Solución

Se procede a dar direcciones a las corrientes. Aplicando luego la ley de Kirchhoff y la ley de Ohm se tienen las siguientes ecuaciones

$$\sum i_k = 0 \qquad\qquad i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$

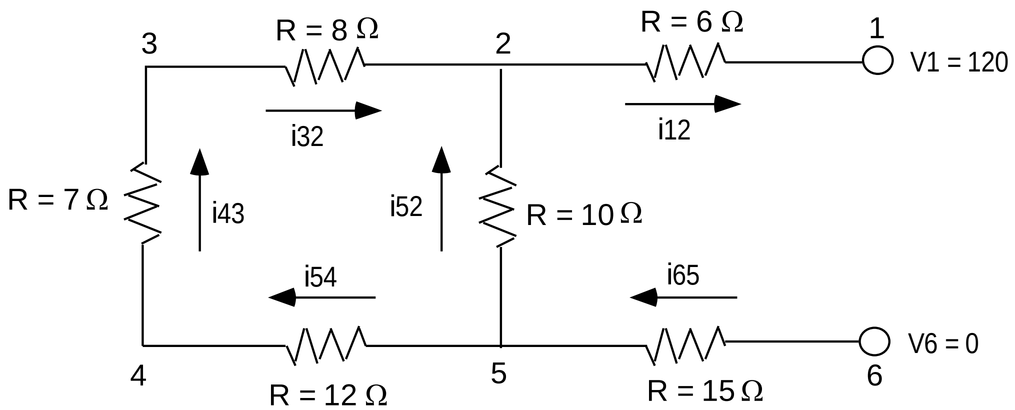


Figura 3.7. Circuito con direcciones de la corriente

Ecuaciones de la corriente

Nodo2

$$i_{32} + i_{52} - i_{12} = 0$$

Nodo 3

$$i_{43} - i_{32} = 0$$

Nodo 4

$$i_{54} - i_{43} = 0$$

Nodo 5

$$i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$$

Ecuaciones del voltaje

$$i_{12} = \frac{V_1 - V_2}{R_{12}}$$
$$i_{12} = \frac{120 - V_2}{6}$$
$$6i_{12} + V_2 = 120$$

$$i_{32} = \frac{V_3 - V_2}{R_{32}}$$
$$i_{32} = \frac{V_3 - V_2}{8}$$
$$8i_{32} + V_2 - V_3 = 0$$

$$i_{43} = \frac{V_4 - V_3}{R_{43}}$$
$$i_{43} = \frac{V_4 - V_3}{7}$$
$$7i_{43} + V_3 - V_4 = 0$$

$$i_{54} = \frac{V_5 - V_4}{R_{54}}$$
$$i_{54} = \frac{V_5 - V_4}{12}$$
$$12i_{54} + V_4 - V_5 = 0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$i_{52}=\frac{V_5-V_2}{R_{52}}$$
$$i_{52}=\frac{V_5-V_2}{10}$$
$$10i_{12}+V_2-V_5=0$$

$$i_{65}=\frac{V_6-V_5}{R_{65}}$$
$$i_{65}=\frac{0-V_5}{15}$$
$$15i_{65}+V_5=0$$

Planteando el sistema de ecuaciones se tiene

$$\begin{bmatrix}-1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&-1&1&0&0&0&0\\6&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&8&0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&7&0&0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&12&0&0&0&1&-1\\0&0&0&10&0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0&15&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{12}\\i_{32}\\i_{43}\\i_{52}\\i_{54}\\i_{65}\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\120\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$i_{12}=-7.36318 \quad Amperios$$
$$i_{32}=-1.99005 \quad Amperios$$
$$i_{43}=-1.99005 \quad Amperios$$
$$i_{52}=-5.37313 \quad Amperios$$
$$i_{54}=-1.99005 \quad Amperios$$
$$i_{65}=-7.36318 \quad Amperios$$

$$V_2=164.1791 \quad Voltios$$
$$V_3=148.2587 \quad Voltios$$
$$V_4=134.3284 \quad Voltios$$
$$V_5=110.4478 \quad Voltios$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

CAPITULO 4.

4. AJUSTE DE CURVAS E INTERPOLACION

4.1 INTRODUCCIÓN

Las técnicas de ajustes de curvas nos permiten obtener aproximaciones intermedias dentro de un conjunto de puntos discretos. Además, a veces se requiere una versión simplificada de una función muy complicada. Una manera de hacerlo es la de calcular valores de la función en un conjunto de valores discretos a lo largo del rango de interés. Después se puede obtener una función más simple ajustando estos valores. A estas dos aplicaciones se les conoce con el nombre de ajuste de curvas.(Rega Armas et al., 2022)

Hay dos esquemas generales en el ajuste de curvas que se distinguen entre sí en base a la cantidad de error asociadas con los datos.

a. Donde los datos muestran un grado significativo de error, la estrategia es derivar una curva simple que represente el comportamiento general de datos. La curva se diseña de tal manera que siga un patrón sobre los puntos tomados como un todo. Aun procedimiento de esta naturaleza se la conoce con el nombre de regresión con mínimos cuadrados.

b. Donde se conoce que los datos son muy exactos, el proceso es ajustar una curva o una serie de curvas que pasen exactamente por cada uno de los puntos. Estos datos generalmente se derivan de tablas. A la estimación de valores entre puntos discretos conocidos se le conoce con el nombre de interpolación.

El método más simple de ajustar una curva a un conjunto de datos es el de trazar los puntos y unirlos con una línea recta (regresión lineal). Una segunda técnica consiste en usar segmentos de línea recta o interpolación lineal en la conexión de los puntos. Una tercera técnica puede consistir en usar curvas que intenten capturan el comportamiento sugerido por los datos, pero se pueden desarrollar un ajuste diferente a los planteados.

Las aplicaciones que puede tener el ajuste de curvas en ingeniería son:

a. Análisis de tendencias para predecir o pronosticar valores de la variable dependiente. Esto a veces involucra extrapolar más allá de los límites de los datos observados o interpolar dentro del rango de datos.

b. La prueba de hipótesis es decir comparar un modelo matemático existente con los datos medidos. Si los coeficientes del modelo se desconocen, a veces es necesario determinar valores que se ajusten mejor a los datos observados. Por otro lado, si las estimaciones de los coeficientes del modelo se encuentran disponibles puede ser apropiado comparar los valores predichos con el modelo con los observados y así probar la eficiencia del método.

c. El ajuste de curvas es también importante en otros métodos numéricos tales como la integración y la solución aproximada de ecuaciones diferenciales.

ISBN: 978-631-6557-41-4

d. Finalmente, los métodos de ajuste de curvas se pueden usar para derivar funciones simples y aproximar funciones complicadas.

4.2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Los fundamentos matemáticos necesarios para la interpolación se encuentran en las expansiones de la serie de Taylor y las diferencias divididas finitas. En la regresión con mínimos cuadrados se requiere además conocimientos básicos de estadística.

Serie de Taylor. La serie de Taylor es aquella serie que da una formulación para predecir el valor de una función en x_{i+1} en términos de la función y de sus derivadas en una vecindad al punto x_i. La expansión completa de la serie de Taylor tiene la forma:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n + R_n \qquad (4.1)$$

Se incluye un término residual para considerar todos los términos desde n +1 hasta el infinito:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^{n+1} \qquad (4.2)$$

donde el subíndice n indica que el residuo es de la aproximación a n-ésimo orden y ξ es un valor cualquiera de x que se encuentra en x_i y x_{i+1}. La serie de Taylor es la herramienta más importante para obtener métodos numéricos y para analizar errores.

Diferencias finitas divididas. Son fórmulas que permiten aproximar derivadas y se obtienen a partir de la expansión de la serie de Taylor. Existen tres tipos de diferencias finitas:

a. Diferencias finitas hacia delante
b. Diferencias finitas hacia atrás
c. Diferencias finitas centrales

Aproximaciones a las derivadas con diferencias hacia adelante. La serie de Taylor se puede expandir hacia adelante para calcular un valor anterior sobre el valor actual, dado por

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \dots$$

Truncando la ecuación después de la primera derivada y ordenando los términos se obtiene:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$$

Primera derivada Error

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} \qquad 0(h)$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2\ h} \qquad 0(h^2)$$

Segunda derivada

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2} \qquad 0(h)$$

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2} \qquad 0(h^2)$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})-f(x_i)}{h^3} \qquad 0(h)$$

$$f'''(x_i)=\frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)}{2h^3} \qquad 0(h^2)$$

Cuarta derivada

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+4})-4f(x_{i+3})+6f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^4} \qquad 0(h)$$

$$f''''(x_i)=\frac{-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)}{h^4} \qquad 0(h^2)$$

Aproximaciones a las derivadas con diferencias hacia atrás. La serie de Taylor se puede expandir hacia atrás para calcular un valor anterior sobre el valor actual, dado por

$$f(x_{i-1})=f(x_i)-f'(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2}h^2-\ldots$$

Truncando la ecuación después de la primera derivada y ordenando los términos se obtiene:

$$f'(x_i)\approx\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}=\frac{\nabla f_i}{h}$$

Primera derivada

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h} \qquad 0(h)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2\,h} \qquad 0(h^2)$$

Segunda derivada

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2} \qquad 0(h)$$

$$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2} \qquad 0(h^2)$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_i)-3f(x_{i-1})+3f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^3} \qquad 0(h)$$

$$f'''(x_i)=\frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})-14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3} \qquad 0(h^2)$$

Cuarta derivada

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_i)-4f(x_{i-1})+6f(x_{i-2})-4f(x_{i-3})+f(x_{i-4})}{2h^4} \qquad 0(h)$$

$$f''''(x_i)=\frac{3f(x_i)-14f(x_{i-1})+26f(x_{i-2})-24f(x_{i-3})+11f(x_{i-4})-2f(x_{i-5})}{h^4} \qquad 0(h^2)$$

Aproximaciones a las derivadas con diferencias finitas centrales. Una tercera forma de aproximar la primera derivada es restar la expansión hacia atrás de la expansión en serie de Taylor hacia delante, para obtener:

Primera derivada

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h} \qquad 0(h^2)$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12\,h} \qquad (h^4)$$

Segunda derivada

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2} \qquad 0(h^2)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2} \qquad 0(h^4)$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{2h^3} \qquad 0(h^2)$$

$$f'''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{8h^3} \qquad 0(h^4)$$

Cuarta derivada

$$f''''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^4} \qquad 0(h^2)$$

$$f''''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})-39f(x_{i+1})+56f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{6\,h^4}$$

Nota: La segunda forma incluye más términos de la serie de Taylor y, por lo tanto, es más exacta.

Estadística. La medida estadística más común es la media. La media ($\bar{y}$) de una muestra se define como la suma de los datos individuales (y_i) dividida por el número de puntos (n):

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \qquad (4.3)$$

La medida más común de la dispersión de una muestra es la desviación estándar (S_y)

$$S_y=\sqrt{\frac{S_t}{n-1}} \qquad (4.4)$$

en donde S_t es la suma total de los cuadrados de los residuos entre los puntos y la media, esto es:

$$S_t=\sum (y_i-\bar{y})^2 \qquad (4.5)$$

Por lo tanto, si las medidas individuales se dispersan muy lejos de la media, S_t (y, por lo tanto S_y) crecerá. Si se agrupan muy cerca de la media entonces la desviación estándar será pequeña. La dispersión también se puede representar por el cuadrado de la desviación estándar, a la cual se le llama varianza:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$S_y^2 = \frac{S_t}{n-1} \tag{4.6}$$

Nótese que el denominador en ambos casos es n-1. Esto toma en consideración que un promedio derivado previamente de los datos (esto es, la media) se usó para determinar S_t.

Una medida estadística final que tiene utilidad en la cuantificación de la dispersión de los datos es el coeficiente de variación (c.v.) Esta medida estadística es el cociente de la desviación estándar de la media:

$$c.v. = \frac{S_y}{\bar{y}} 100\% \tag{4.7}$$

El coeficiente de variación es similar al error relativo porcentual. En muchos problemas existen dos o más variables que están relacionadas y puede resultar importante modelar y explorar esta relación.

En general, se supone que una variable dependiente o de respuesta **y** que depende de n variables independientes o de regresión, por ejemplo, x_1, $x_2, \ldots, x_n$. La relación entre estas variables se caracteriza por un modelo matemático conocido como ecuación de regresión. El modelo de regresión se ajusta a un conjunto de datos muestrales.

Frecuentemente, los métodos de regresión se utilizan para analizar datos que provienen de experimentos que no fueron diseñados. Este es el caso del estudio de fenómenos no controlados o de registros históricos. El análisis de regresión también es muy útil en experimentos diseñados para construir un modelo cuantitativo que relacione los factores importantes con la respuesta.

4.3 REGRESIÓN LINEAL

Dada una función tabular, se trata de obtener los valores de los coeficientes de la función. El ejemplo más simple de una aproximación es el ajuste de una línea recta a un conjunto de parejas de datos observados: (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n). La ecuación de una línea recta es

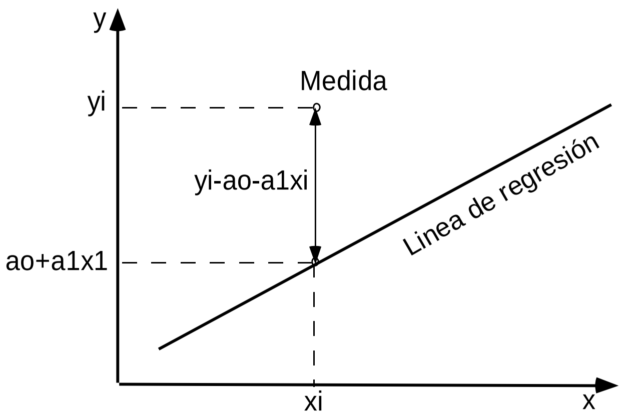


Figura 4.1. El residuo en la regresión lineal

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y = a_o + a_1 x + E \qquad (4.8)$$

en donde a_0 y a_1 son coeficientes que representan la intersección con el eje de las abscisas y la pendiente respectivamente y E es el error o residuo entre el modelo y las observaciones, que se puede representar reordenando la ecuación (4.8) como

$$E = y - a_o - a_1 x$$

Por lo tanto, el error o residuo es la diferencia entre el valor real de **y** y el valor aproximado $a_0 + a_1$ x.

El método de los mínimos cuadrados consiste en determinar los valores de los coeficientes a_o y a_1 de manera que hagan mínima la suma de los cuadrados de los residuos S_r. Esta suma vale

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_o + a_1 x_i)^2 \qquad (4.9)$$

Se obtiene la suma mínima, igualando a cero sus primeras derivadas parciales con respecto a todos y cada uno de los coeficientes.

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_o} = -2\sum\left(y_i - a_o - a_1 x_i\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum\left(y_i - a_o - a_1 x_i\right)x_i$$

Igualando a cero esta derivada, se llega a

$$0 = \sum y_i - \sum a_o - \sum a_1 x_i$$

$$0 = \sum y_i x_i - \sum a_o x_i - \sum a_1 x_i^2$$

Considerando que $\sum a_0 = n a_0$, las ecuaciones se pueden expresar como un sistema de ecuaciones simultaneas con dos incógnitas a_0 y a_1

$$n a_0 + \sum x_i a_1 = \sum y_i$$
$$\sum x_i a_0 + \sum x_i^2 a_1 = \sum x_i y_i$$

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para determinar el error en la regresión lineal se puede utilizar dos alternativas:

a. Determinando el error estándar de la aproximación, mediante la siguiente ecuación

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \tag{4.11}$$

Si el error estándar de la aproximación $S_{y/x}$ es menor que la desviación estándar S_y se dice que el modelo de regresión lineal es aceptable. Lo contrario, le hace al ajuste no aceptable.

b. Calculando los coeficientes de correlación o de determinación, mediante la siguiente ecuación

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \tag{4.12}$$

en donde r es el coeficiente de correlación y r^2 es el coeficiente de determinación. S_t es la suma total de los cuadrados y S_r es la suma de los cuadrados de los residuos. La suma total de los cuadrados se determina mediante

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2 \tag{4.13}$$

Un ajuste será perfecto cuando $S_r = 0$ y $r^2 = 1$. Es el modelo de regresión pasa por todos y cada uno de los puntos correspondientes a los datos de las observaciones.

Ejemplo.

Usando regresión lineal encontrar la ecuación de ajuste de los siguientes datos y verificar su aceptabilidad. (Granados Ospina, 2015)

Tabla 4.1

x	1	3	5	7	10
y	2	4	7	11	18

Solución

Se procede a calcular las sumatorias de x, x^2, y, x*y, S_t y S_r

Tabla 4.2

	x	y	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	y_c	$(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
	1	2	1	2	0.861	1.298	40.96
	3	4	9	12	4.451	0.203	19.36
	5	7	25	35	8.041	1.084	1.96
	7	11	49	77	11.631	0.398	6.76
	10	18	100	180	17.016	0.967	92.16
Totales	**26**	**42**	**184**	**306**		**3.951**	**161.2**

ISBN: 978-631-6557-41-4

n	5
Σx_i	26
Σy_i	42
Σx_i^2	184
$\Sigma x_i \cdot y_i$	306
$\bar{x}$	5.2
$\bar{y}$	8.4
S_r	3.951
$S_{y/x}$	1.1476
Desviación Std	6.348
S_t	161.200
R^2	0.9755
R	0.988

Se plantea el sistema para determinar los coeficientes a_0 y a_1

$$\begin{bmatrix} 5 & 26 \\ 26 & 184 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 306 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene

$$a_o = -0.93443$$
$$a_1 = 1.795082$$

Por lo tanto, la ecuación del ajuste es

$$y = 1.795082x - 0.93443$$

Determinando S_t y S_r se calcula el coeficiente de correlación

$$r^2 = \frac{161.2 - 3.950819}{161.2} = 0.975491$$

Para el otro método de comprobación, se calcula la desviación estándar S_y y el error estándar de aproximación $S_{y/x}$

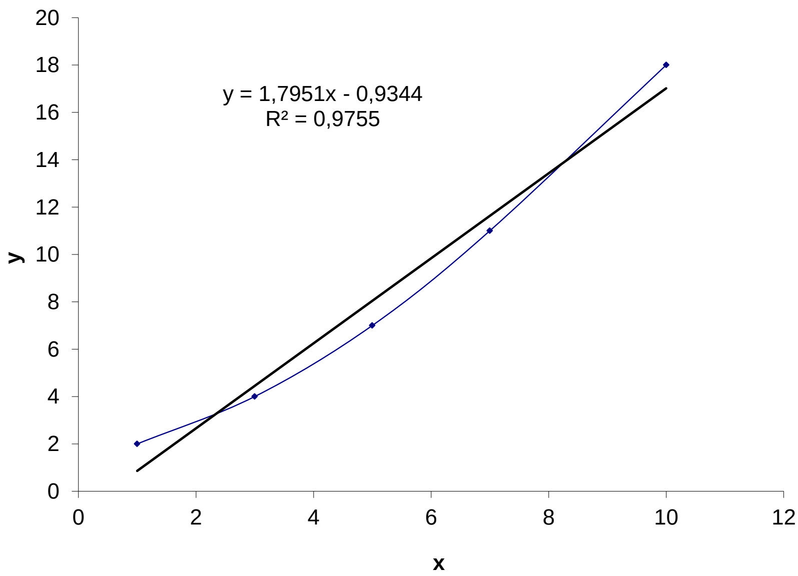


Figura 4.2. Representación gráfica de los datos y de la recta de ajuste

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} = \sqrt{\frac{161.2}{5-1}} = 6.348228$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} = \sqrt{\frac{3.950819}{5-2}} = 0.993833$$

como $S_{y/x}$ es menor que S_y el modelo de ajuste es aceptable y viene dado por

$$y = 1.5264 + 3.842x$$

4.4 REGRESIÓN POLINOMIAL

El procedimiento de mínimos cuadrados se puede extender fácilmente y ajustar datos a un polinomio de m-ésimo grado:

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \qquad (4.14)$$

En este caso, la suma de los cuadrados de los residuos es

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_o - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots - a_m x_i^m \right)^2 \qquad (4.15)$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, se toma la derivada de la ecuación (4.15) con respecto a cada uno de los coeficientes del polinomio, para obtener:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_o} = -2 \sum \left(y_i - a_o - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots - a_m x_i^m \right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i \left(y_i - a_o - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots - a_m x_i^m \right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i^2 \left(y_i - a_o - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots - a_m x_i^m \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2 \sum x_i^m \left(y_i - a_o - a_1 x_i - a_2 x_i - \ldots - a_m x_i^m \right)$$

Estas ecuaciones se pueden igualar a cero y reordenar de tal forma que se obtenga el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$a_o n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \ldots + a_m \sum x_i^m = \sum y_i$$

$$a_o \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \ldots + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum x_i \; y_i$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$a_o \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \ldots + a_m \sum x_i^{m+2} = \sum x_i^2 \, y_i$$

. . . .

$$a_o \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} + a_2 \sum x_i^{m+2} + \ldots + a_m \sum x_i^{2m} = \sum x_i^m \, y_i$$

en donde todas las sumatorias van desde i = 1 hasta m. Nótese que las m + 1 ecuaciones anteriores son lineales y tienen m + 1 incógnitas: a_o, a_1, ... , a_m. Los coeficientes de las incógnitas se pueden calcular directamente de los datos observados. Por lo tanto, el problema de determinar polinomios de grado m con mínimos cuadrados es equivalente a resolver un sistema de m + 1 ecuaciones lineales simultáneas.

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & . \; . & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & . \; . & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & . \; . & \sum x_i^{m+2} \\ . & . & . & . \; . & . \\ . & . & . & . \; . & . \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & . \; . & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i \, y_i \\ \sum x_i^2 \, y_i \\ . \\ . \\ \sum x_i^m \, y_i \end{bmatrix} \qquad (4.16)$$

Así como en la regresión lineal, el error en la regresión polinomial se puede cuantificar mediante el error estándar de la aproximación:

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}} \qquad (4.17)$$

en donde m es el orden del polinomio. esta cantidad se divide por n - (m+1) ya que se usaron m + 1 coeficientes - a_o, a_1, . . . , a_m - derivados de los datos para calcular S; por lo tanto, se han perdido m +1 grados de libertad. Además del error estándar, se puede calcular también el coeficiente de correlación en la regresión polinomial de la misma manera que para el caso lineal:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Ejemplo .

Usando regresión polinomial encontrar la ecuación de ajuste de los siguientes datos y verificar su aceptabilidad.

Tabla 4.3

X	1	3	5	7	10
Y	2	4	7	11	18

Solución

Si se quiere obtener un polinomio de orden 3, procede a calcular las sumatorias de x, x^2, x^3 , x^4, x^5, x^6, y, x*y, x^2*y, x^3*y.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Tabla 4.4

x	y	x_i^2	x_i^3	$x_i \cdot y_i$	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$	x_i^5	x_i^6	$x_i^3 \cdot y_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	y_c	$(y_i - y_c)^2$
1	2	1	1	2	1	2	1	1	2	40.96	2.0074	5E-05
3	4	9	27	12	81	36	243	729	108	19.36	3.9716	0.0008
5	7	25	125	35	625	175	3125	15625	875	1.96	7.0398	0.0016
7	11	49	343	77	2401	539	16807	117649	3773	6.76	10.978	0.0005
10	18	100	1000	180	10000	1800	100000	1000000	18000	92.16	18.003	1E-05
26	**42**	**184**	**1496**	**306**	**13108**	**2552**	**120176**	**1134004**	**22758**	**161.2**		**0.0029**

n	5
Σx_i	26
Σx_i^2	184
Σy_i	42
Σx_i^3	1496
$\Sigma(x_i \cdot y_i)$	306
Σx_i^4	13108
$\Sigma(x_i^2 \cdot y_i)$	2552
Σx_i^5	120176
Σx_i^6	1134004
$\Sigma(x_i^3 \cdot y_i)$	22758
$\bar{y}$	8.4
S_t	161.2
S_r	0.0029495
R^2	1.0000
R	1.0000

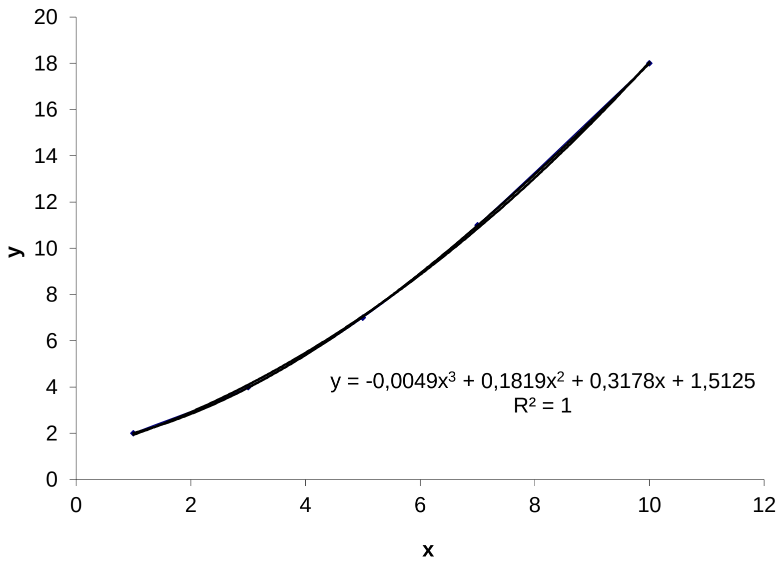


Figura 4.3. Representación gráfica de los datos y de la curva de ajuste polinomial

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se plantea el sistema para determinar los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4.

$$\begin{bmatrix} 5 & 26 & 184 & 1496 \\ 26 & 184 & 1496 & 13108 \\ 184 & 1496 & 13108 & 120176 \\ 1496 & 13108 & 120176 & 1134004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 306 \\ 2552 \\ 22758 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene

a_o= 1,51252
a_1 = 0,317798
a_2 = 0,181936
a_3 = -0,00488

Por lo tanto, la ecuación del ajuste es

$$y = -0.00488\,x^3 + 0.181936\,x^2 + 0.317798\,x + 1.51252$$

Determinando S_t y S_r se calcula el coeficiente de correlación

$$r^2 = \frac{161.2 - 0.002950}{161.2} = 0.999982 \approx 1$$

Para el otro método de comprobación, se calcula la desviación estándar S_y y el error estándar de aproximación $S_{y/x}$

$$S_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} = \sqrt{\frac{161.2}{5-1}} = 6.348228$$

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} = \sqrt{\frac{0.002950}{5-2}} = 0.031358$$

como $S_{y/x}$ es menor que S_y el modelo de ajuste es aceptable.

ISBN: 978-631-6557-41-4

4.5 LINEALIZACIÓN DE RELACIONES O LINEALES

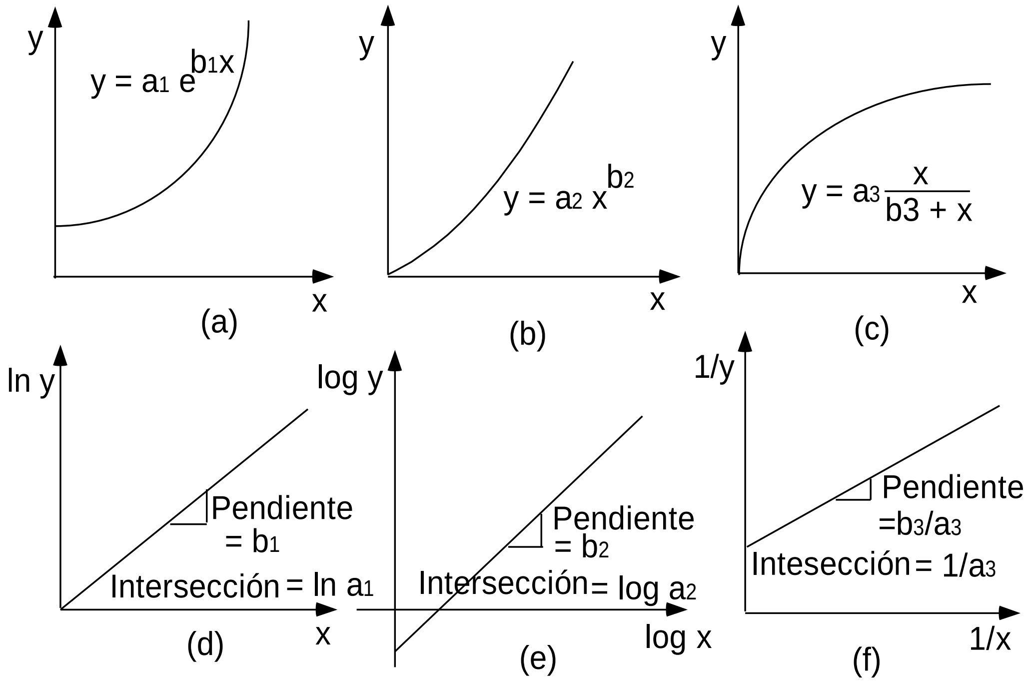


Figura 4.4. a) Ecuación exponencial, b) ecuación de potencias y c) ecuación del promedio de crecimiento de saturación. Las figuras d, e y f son las versiones linealizadas correspondientes.

Hasta el momento se ha considerado que la relación entre las variables dependiente e independientes es lineal. Este no es siempre el caso, y el primer paso en cualquier análisis de regresión es el de trazar y visualizar gráficamente los datos para decidir si es correcto o aceptable el aplicar un modelo lineal. Por ejemplo, en la figura, se muestran algunas funciones que no son lineales. En este caso se vuelve necesario hacer algunas transformaciones para linealizar estas funciones.

La figura (4.4 a) representa un modelo exponencial de la forma

$$y = a_1 e^{b_1 x} \tag{4.18}$$

en donde a_1 y b_1 son constantes. Para linealizar se aplican logaritmos naturales de forma que

$$\ln y = \ln a_1 + b_1 \, x \ln e$$

puesto que ln e = 1 se tiene finalmente

$$\ln y = \ln a_1 + b_1 \, x \tag{4.19}$$

Por lo tanto, una gráfica semilogarítmica de ln y contra x (figura 4.4.d) genera una línea recta con una pendiente de b_1 y una intersección ln a_1.

ISBN: 978-631-6557-41-4

La figura (4.4.b) representa un modelo de potencias de la forma

$$y = a_2\, x^{b_2} \qquad (4.20)$$

en donde a_2 y b_2 son constantes. Para linealizar se aplican logaritmos de base 10 de forma que

$$\log y = b_2 \log x + \log a_2 \qquad (4.21)$$

Por lo tanto, una gráfica logarítmica de log y contra log x (figura 4.4.e) genera una línea recta, con una pendiente de b_2 y una intersección log a_2.

La figura (4.4.c) representa un modelo de crecimiento de saturación de la forma

$$y = a_3 \frac{x}{b_3 + x} \qquad (4.22)$$

en donde a_3 y b_3 son constantes. Para linealizar se invierten ambos términos

$$\frac{1}{y} = \frac{b_3}{a_3}\frac{1}{x} + \frac{1}{a_3} \qquad (4.23)$$

Por lo tanto, una gráfica de 1/y contra 1/x (figura 4.4.f) genera una línea recta, con una pendiente b_3/a_3 y una intersección $1/a_3$

Estos modelos y muchos otros que pueden ser factibles de linealizar, se ajustan usando regresión lineal para evaluar las constantes. Después se pueden transformar y presentar en su forma original para propósitos predictivos.

Ejemplo:

De la experimentación en vertederos rectangulares se obtienen los datos mostrados en la tabla 4.5, si se conoce que el modelo de un vertedero rectangular viene dado por $Q = a_2\, h^{b_2}$. Encontrar los coeficientes de dicho modelo.

Tabla 4.5

H	1	2	3	4
Q	0,7	1,979899	3,637307	5,6

Solución

Se procede a linealizar el modelo utilizando logaritmos

$$\log y = b_2 \log x + \log a_2$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Luego se procede a calcular las sumatorias de log Q , log h, (log h)^2, S_t y S_r.

Tabla 4.6

h	**Q**	**log Q**	**log h**	**(log h)^2**	**log h* log Q**	**St**	**Sr**
1	0,7	-0,154902	0,000000	0,000000	0	5,195215	0,000000
2	1,979899	0,296643	0,301030	0,090619	0,08929845	0,998805	0,000000
3	3,637307	0,560780	0,477121	0,227645	0,26756002	0,432971	0,000000
4	5,6	0,748188	0,602060	0,362476	0,45045408	6,868061	0,000000
10	**11,9172057**	**1,450709**	**1,380211**	**0,680740**	**0,80731255**	**13,495052**	**0,000000**

Se plantea el sistema para determinar los coeficientes a_2 y b_2.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1{,}380211 \\ 1{,}380211 & 0{,}680740 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}450799 \\ 0{,}807313 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene

$\log a_2 = -0{,}154902 \quad \rightarrow \quad a_2 = 0{,}7$

$b_2 = 1{,}5$

Por lo tanto, la ecuación del ajuste es

$$Q = 0{,}7\, h^{1{,}5}$$

Determinando S_t y S_r se calcula el coeficiente de correlación

$$r^2 = \frac{13{,}495052 - 0}{13{,}495052} = 1$$

Por lo tanto, el ajuste es perfecto

4.6 REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

Cuando y es una función de dos o más variables independientes de la forma

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m \tag{4.24}$$

se debe aplicar regresión lineal múltiple.

Como en los casos anteriores la suma de los cuadrados de los residuos se calcula por

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_o - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i} \right)^2 \tag{4.25}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, se toma la derivada de la ecuación (4.25) con respecto a cada uno de los coeficientes del polinomio, para obtener:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_o} = -2\sum\left(y_i - a_o - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i}\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum x_i\left(y_i - a_o - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i}\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum x_{1,i}\left(y_i - a_o - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2\sum x_{m,i}\left(y_i - a_o - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} - \ldots - a_m x_{m,i}\right)$$

Estas ecuaciones se pueden igualar a cero y reordenar de tal forma que se obtenga el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$a_o\, n + a_1\sum x_{1,i} + a_2\sum x_{2,i} + \ldots + a_m\sum x_{m,i} = \sum y_i$$

$$a_o\sum x_{1,i} + a_1\sum x_{1,i}^2 + a_2\sum x_{1,i}\, x_{2,i}\, a_2 + \ldots + a_m\sum x_{1,i}\, x_{m,i} = \sum x_{1,i}\, y_i$$

$$a_o\sum x_{2,i} + a_1\sum x_{2,i}\, x_{1,i} + a_2\sum x_{2,i}^2 + \ldots + a_m\sum x_{2,i}\, x_{m,i} = \sum x_{2,i}\, y_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_o\sum x_{m,i} + a_1\sum x_{m,i}\, x_{1,i} + a_2\sum x_{m,i}\, x_{2,i} + \ldots + a_m\sum x_{m,i}^2 = \sum x_{m,i}\, y_i$$

En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} & . & . & \sum x_{m,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{2,i}\, x_{1,i} & . & . & \sum x_{1,i}\, x_{m,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{2,i}\, x_{1,i} & \sum x_{2,i}^2 & . & . & \sum x_{2,i}\, x_{m,i} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \sum x_{m,i} & \sum x_{m,i}\, x_{1,i} & \sum x_{m,i}\, x_{2,i} & . & . & \sum x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i}\, y_i \\ \sum x_{2,i}\, y_i \\ . \\ . \\ \sum x_{m,i}\, y_i \end{bmatrix} \qquad (4.26)$$

Así como en la regresión lineal, el error en la regresión polinomial se puede cuantificar mediante el error estándar de la aproximación:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$S_{y/x_1,x_2,\cdots,x_m} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}} \quad (4.27)$$

en donde m es el orden del polinomio. esta cantidad se divide por n - (m+1) ya que se usaron m + 1 coeficientes a_o, a_1, . . . , a_m derivados de los datos para calcular S; por lo tanto, se han perdido m +1 grados de libertad. Además del error estándar, se puede calcular también el coeficiente de correlación en la regresión polinomial de la misma manera que para el caso lineal:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

Ejemplo:

Tabla 4.7

X_1	1	1.5	2	3	5
X_2	1	2	3	5	6
Y	15	14,5	17	16	18

Solución

Se procede a calcular las sumatorias de x_1, x_2, x_1^2 , x_2^2, x^5, x_1*x_2, x_1*y, x_2*y, S_t y S_r

Tabla 4.8

Y	**x_1^2**	**x_2^2**	**x_1*x_2**	**x_1*y**	**x_2*y**	**S_t**	**S_r**
15	1	1	1	15	15	1,21	1,6E-11
14,5	2,25	4	3	21,75	29	2,56	0,73469927
17	4	9	6	34	51	0,81	1,65305535
16	9	25	15	48	80	0,01	0,18367396
18	25	36	30	90	108	3,61	2,496E-31
80,5	**41,25**	**75**	**55**	**208,75**	**283**	**8,2**	**2,57142857**

Se plantea el sistema para determinar los coeficientes a_0 , a_1 y a_2

$$\begin{bmatrix} 5 & 12.5 & 17 \\ 12.5 & 41.25 & 55 \\ 17 & 55 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.5 \\ 208.75 \\ 283 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene

$a_o = 14,2381$

$a_1 = 0,809524$

$a_2 = -0,04762$

Por lo tanto, la ecuación del ajuste es

$$y = 14,2381 + 0,809524\,x_1 - 0,04762\,x_2$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Determinando S_t y S_r se calcula el coeficiente de correlación

$$r^2 = \frac{8,2 - 2,571428}{2,571428} = 0,686411$$

4.7 INTERPOLACIÓN.

Con frecuencia se tienen que estimar valores intermedios entre valores conocidos. El método más común empleado para este propósito es la interpolación polinomial.

Recuérdese que la fórmula general de un polinomio de n-ésimo orden es:

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{4.28}$$

Para n +1 puntos, existe uno y sólo un polinomio de n-ésimo orden o menor que pasa a través de todos los puntos.

El polinomio de interpolación consiste en determinar el único polinomio de n-ésimo orden que se ajusta a los n + 1 puntos dados. Este polinomio proporciona una fórmula para calcular los valores intermedios.

Aunque existe uno y sólo un polinomio de n-ésimo orden que se ajusta a los n+1 puntos, existen una gran variedad de fórmulas matemáticas mediante las cuales se puede expresar este polinomio.

4.7.1 Polinomios De Interpolación Con Diferencias Divididas De Newton.

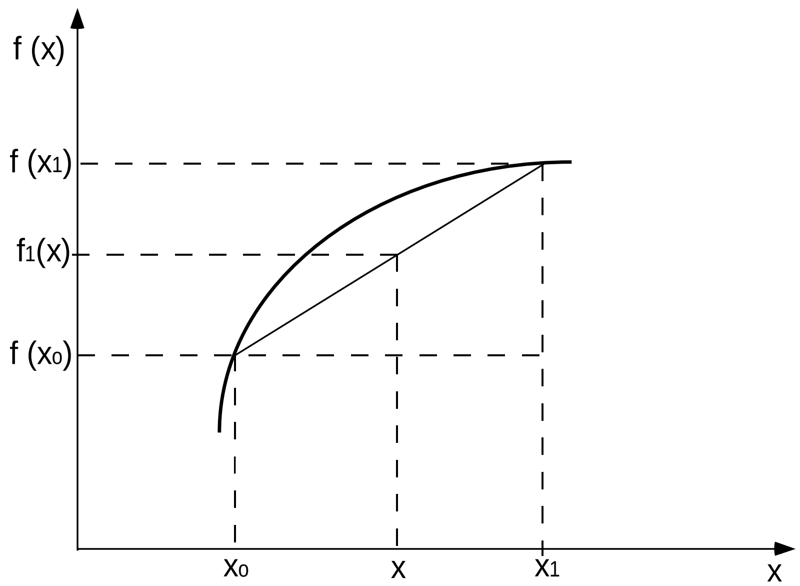


Figura 4.5. Representación gráfica de la interpolación lineal

ISBN: 978-631-6557-41-4

4.7.1. 1 Interpolación lineal. Es la interpolación entre dos puntos. La forma más simple de interpolación es la de conectar dos puntos con una línea recta. Este método, llamado interpolación lineal, se muestra en la figura. Usando triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{f_1(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x_1)-f(x_o)}{x-x_o}$$

que se puede reordenar como:

$$f_1(x)=f(x_o)+\frac{f(x_1)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o) \tag{4.29}$$

La cual es una fórmula de interpolación lineal. La notación f_1 (x) indica que se trata de un polinomio de interpolación de primer orden. Nótese que además de representar la pendiente de la línea que conecta los dos puntos, el término $\left[\frac{f(x_1)-f(x_o)}{x-x_o}\right]$ es una aproximación de diferencias finitas divididas a la primera derivada. En general, entre más pequeño sea el intervalo entre los puntos, más exacta será la aproximación.

Ejemplo:

Dados los datos

Tabla 4.9

x	-1	0	1	2	4	5
f (x)	-20	5	8	1	5	40

Calcúlese el polinomio interpolante entre los puntos 3 y 4, usando la interpolación lineal

Solución

El polinomio interpolante para el punto 3 y el punto 4 es

$$p_{3.4}(x)=f_3+\frac{f_4-f_3}{x_4-x_3}=8+\frac{1-8}{2-1}(x-1)=15-7x$$

4.7.1.2 Interpolación Cuadrática. Es la interpolación de tres puntos. Una estrategia que mejora la aproximación es la de introducir cierta curvatura en la línea que conecta a los puntos. Si se dispone de tres datos, lo anterior se puede llevar a cabo con un polinomio de segundo orden (llamado también polinomio cuadrático o parábola). Una manera conveniente para este caso es:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f_2(x) = b_o + b_1(x - x_o) + b_2(x - x_o)(x - x_1) \qquad (4.30)$$

A pesar de que la ecuación (4.30) parece diferente de la ecuación general de un polinomio (4.28), las dos ecuaciones son equivalentes. Esto se puede demostrar si se desarrolla la ecuación (4.30), obteniéndose lo siguiente:

$$f_2(x) = b_o + b_1 x - b_1 x_o + b_2 x^2 + b_2 x_o x_1 - b_2 x x_o - b_2 x x_1$$

o. agrupando términos:

$$f_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$$

en donde

$$a_o = b_o - b_1 x_o + b_2 x_o x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_o - b_2 x_1$$

$$a_2 = b_2$$

de esta manera, las ecuaciones (4.28) y (4.29) son fórmulas alternativas equivalentes del único polinomio de segundo grado que une a los tres puntos.

Se puede usar un procedimiento simple para determinar los valores de los coeficientes. Para b_o , se usa la ecuación (4.30) con $x = x_o$ y se obtiene

$$b_o = f(x_o) \qquad (4.31)$$

Sustituyendo la ecuación (4.31) en la ecuación (4.30) y evaluando $x = x_1$ se obtiene:

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o} \qquad (4.32)$$

Y, por último, las ecuaciones (4.31) y (4.32) se sustituyen en la ecuación (4.30), y se evalúa ésta en $x = x_2$ y se obtiene:

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_o)}{x_1 - x_o}}{x_2 - x_o} \qquad (4.33)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Nótese que, al igual que en el caso de interpolación lineal, b_1 aún representa la pendiente de la línea que une los puntos x_o y x_1.

Ejemplo:

Dados los datos

Tabla 4.10

x	-1	0	1	2	4	5
f (x)	-20	5	8	1	5	40

Calcúlese el polinomio interpolante entre los puntos 3 y 4, usando la interpolación lineal

Solución

El polinomio interpolante para el punto 3 y el punto 5 es

$$f_{3,5}(x) = b_o + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2)$$

$$b_o = f(x_3) = 8$$

$$b_1 = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{1-8}{2-1} = -7$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4} - \dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}}{x_5 - x_3} = \frac{\dfrac{5-1}{4-2} - \dfrac{1-8}{2-1}}{4-1} = 3$$

$$f_{3,5}(x) = 8 + -7\,(x-1) + 3\,(x-1)(x-2) = 3x^2 - 16x + 21$$

De los ejemplos planteados a continuación se quiere demostrar la mejora que existe al plantear la interpolación cuadrática con relación a la interpolación lineal. Se quiere conocer el valor de f(x), cuando x=1,5

Mediante la interpolación lineal:

$$p_{3.4}(x) = f_3 + \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3} = 8 + \frac{1-8}{2-1}(x-1) = 15 - 7x$$

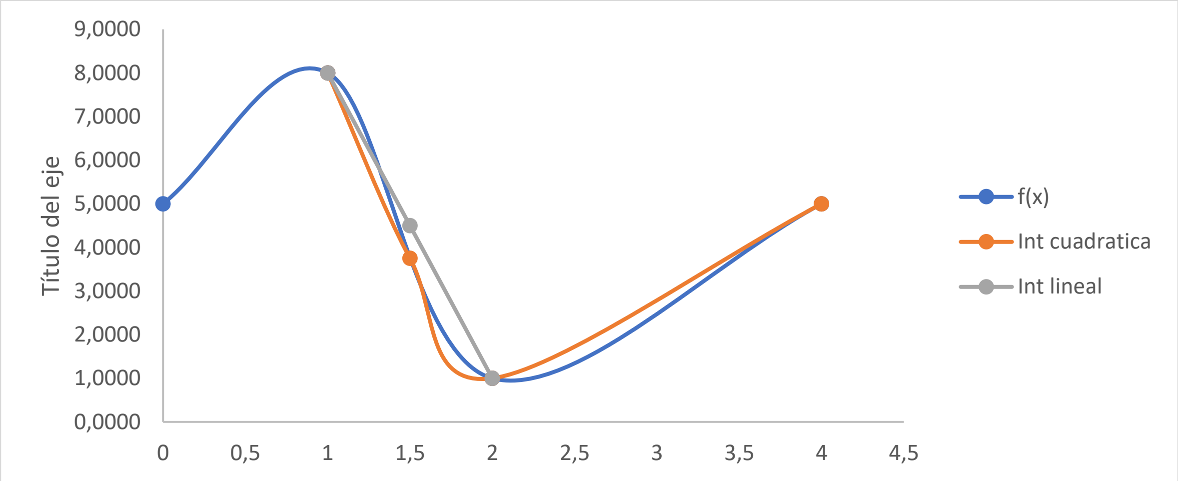
x	f(x)
1	8
1.5	**4.5**
2	1

Mediante la interpolación cuadrática

$$f_{3,5}(x) = 8 + -7\,(x-1) + 3\,(x-1)(x-2) = 3x^2 - 16x + 21$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

x	f(x)
1	8
1.5	**3,75**
2	1
4	5



Como se puede ver en la gráfica, el resultado de la interpolación cuadrática se acerca más al valor real.

4.7.1.3 Forma general de los polinomios de interpolación de Newton

El análisis anterior se puede generalizar en el ajuste de un polinomio de n-ésimo orden a los n + 1 puntos. El polinomio de n-ésimo orden es:

$$f_n(x) = b_o + b_1(x - x_o) + \ldots + b_n(x - x_o)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (4.34)$$

Como se hizo anterior mente con las interpolaciones lineales y cuadráticas, se usan los puntos en la evaluación de los coeficientes b_o , b_1 . . . , b_n. Se requieren n +1 puntos para obtener un polinomio de n-ésimo orden: x_o , x_1, . . . , x_n. Usando estos datos, con las ecuaciones siguientes se evalúan los coeficientes:

$$b_o = f(x_o) \qquad (4.35)$$

$$b_1 = f[x_1, x_o] \qquad (4.36)$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_o] \qquad (4.37)$$

……………………

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_o] \qquad (4.38)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

en donde las evaluaciones de la función entre corchetes son diferencias divididas finitas. Por ejemplo, la primera diferencia dividida finita se representa como:

$$f\left[x_i, x_j\right] = \frac{f\left(x_i\right) - f\left(x_j\right)}{x_i - x_j} \tag{4.39}$$

La segunda diferencia dividida finita, que representa la diferencia de las dos primeras diferencias finitas, se expresa generalmente como:

$$f\left[x_i, x_j, x_k\right] = \frac{f\left[x_i, x_j\right] - f\left[x_j, x_k\right]}{x_i - x_k} \tag{4.40}$$

De manera similar, la n-ésima diferencia dividida finita es:

$$f\left[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_o\right] = \frac{f\left[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1\right] - f\left[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_o\right]}{x_n - x_o} \tag{4.41}$$

Estas diferencias se usan para evaluar los coeficientes de las ecuaciones (4.36) a la (4.38), los cuales se sustituyen en la ecuación (4.42) para obtener el polinomio de interpolación:

$$\begin{aligned} f_n\left(x\right) &= f\left(x_o\right) + \left(x - x_o\right) f\left[x_1, x_o\right] + \left(x - x_o\right)\left(x - x_1\right) f\left[x_2, x_1, x_o\right] \\ &+ \ldots + \left(x - x_o\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_{n-1}\right) f\left[x_n, x_{n-1,} \ldots, x_o\right] \end{aligned} \tag{4.42}$$

Al cual se le llama polinomio de interpolación con diferencias divididas de Newton. Se debe notar que no es necesario que los datos usados en la ecuación (4.42) estén igualmente espaciados o que los valores de la abscisa necesariamente se encuentren en orden ascendente.

4.7.1.4 Error de los procesos de interpolación

Supongamos que la función f es aproximada por el polinomio interpolador, o sea,

$$f\left(x\right) = P_n\left(x\right) + R_n\left(x\right) \tag{4.43}$$

donde R_n (x) es el término residual de la fórmula de interpolación

$$f\left(x\right) \approx P_n\left(x\right)$$

El término residual depende de muchos factores: de las propiedades de la función f, de los parámetros de interpolación y de la posición del punto de interpolación. Por eso el estudio de R_n (x) es un problema difícil.

El error de truncamiento en la serie de Taylor se expresó en forma general como:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\left(x_{i+1} - x_i\right)^{n+1}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

en donde ξ es un punto cualquiera dentro del intervalo [x_i, x_{i+1}]. Una relación análoga del error en un polinomio interpolante de n-ésimo orden está dada por:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_o)\,(x-x_1)\ldots(x-x_n) \tag{4.44}$$

en donde ξ es un punto cualquiera dentro del intervalo que contiene las incógnitas y los datos. Para uso de esta fórmula la función en cuestión debe ser conocida y diferenciable. Y usualmente, este no es el caso. Afortunadamente, existe una fórmula alternativa que no requiere conocimiento previo de la función. En vez ello, se usa una diferencia dividida finita que aproxima la (n+1)-ésima derivada:

$$R_n = f\,[x, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_o](x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \tag{4.45}$$

en donde $[x, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_o]$ es la (n +1) – ésima diferencia dividida. Ya que la ecuación (4.45) contiene la incógnita f(x), ésta no se puede resolver y obtener el error. Sin embargo, si se dispone de un dato adicional f (x_{n+1}), la ecuación (4.45) da una aproximación del error como:

$$R_n \approx f\,[x_{n+1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_o](x-x_o)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \tag{4.46}$$

4.7.2 Polinomios De Interpolación De Lagrange

El polinomio de interpolación de Lagrange simplemente es una reformulación del polinomio de Newton que evita los cálculos de las diferencias divididas. Este se puede representar concretamente como:

$$f_n(x) = \sum_{i=o}^{n} L_i(x)\, f(x_i) \tag{4.47}$$

en donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=o,\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{4.48}$$

en donde $\prod$ denota el "producto de". Por ejemplo, la versión lineal (n = 1) es:

$$f_1(x) = \frac{x-x_1}{x_o-x_1}\, f(x_o) + \frac{x-x_o}{x_1-x_o}\, f(x_1)$$

y la versión de segundo orden es:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)}f(x_o)+\frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

Al igual que el método de Newton, la versión de Lagrange tiene un error aproximado, dado por:

$$R_m = f[x,x_n,x_{n-1},\ldots,x_o]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \qquad (4.49)$$

Ejemplo 1:

Dados los datos

Tabla 4.11

X	-1	0	1	2	4	5
f (x)	-20	5	8	1	5	40

Calcúlese el polinomio interpolante de Lagrange entre los puntos 3 y 5.

Solución

El polinomio interpolante de Lagrange para el punto 3 y el punto 5 es

$$p_{La\,gra\,nge}(x)=f_3L_3(x)+f_4L_4(x)+f_5L_5(x)$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_4)(x_3-x_5)}$$

$$L_4(x)=\frac{(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_3)(x_4-x_5)}$$

$$L_4(x)=\frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_3)(x_5-x_4)}$$

$$p_{La\,gra\,nge}(x)=8\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}+1\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}+5\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}=3x^2-16x+21$$

4.7.3 Interpolación Segmentaria (Spline)

ISBN: 978-631-6557-41-4

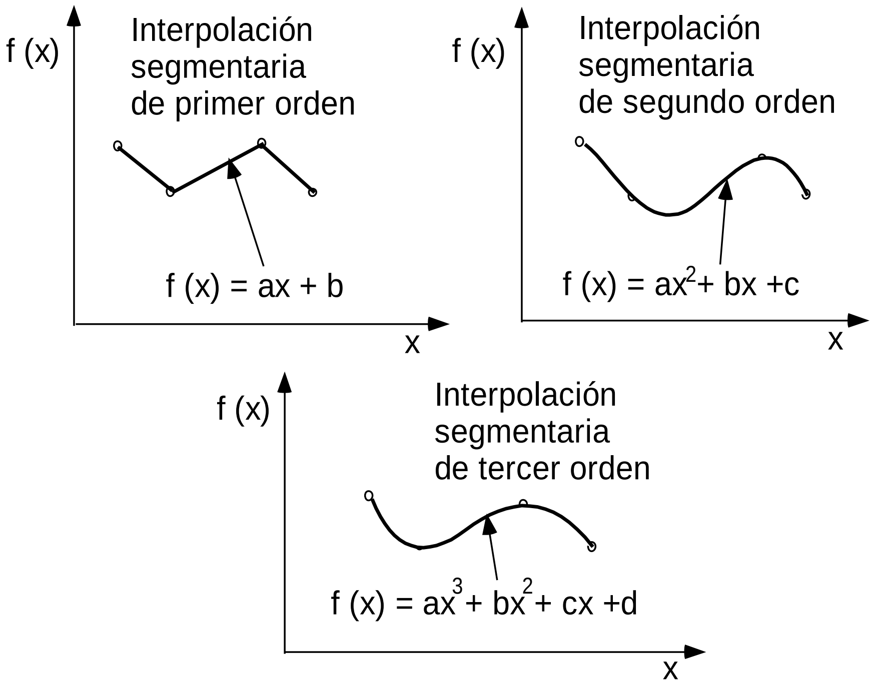


Figura 4.6. Representación de la interpolación segmentaria

En la sección anterior se usaron polinomios de n-ésimo orden para interpolar n + 1 puntos. Por ejemplo, en ocho puntos, se deriva un polinomio perfecto de séptimo orden. Esta curva captura todos los serpenteos (al menos considerada hasta derivadas de séptimo orden) sugeridos por los puntos. Sin embargo, existen casos en donde estas funciones pueden llevar resultados erróneos. Una alternativa es la de aplicar polinomios de orden inferior a subconjuntos de datos. Estos polinomios conectados se llaman funciones de interpolación segmentaria (funciones spline).

Por ejemplo, las curvas de tercer orden empleadas para conectar cada par de datos se llaman funciones de interpolación cúbica segmentaria. Estas funciones tienen la propiedad adicional de que las conexiones entre ecuaciones cúbicas adyacentes son visualmente suaves.

El concepto de interpolación segmentaria se originó de la técnica de uso de una lámina de plástico delgada (llamada curvígrafo) en el trazo de curvas suaves a través de un conjunto de puntos.

4.7.3.1 Interpolación segmentaria lineal.

La conexión más simple entre un par de puntos es una línea recta. Se puede definir los polinomios interpolantes de primer orden mediante un conjunto de puntos ordenados y definirse como un conjunto de funciones lineales que unen a los puntos:

$$f(x) = f(x_o) + m_o(x - x_o) \qquad x_o \leq x \leq x_1$$

$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \qquad x_1 \leq x \leq x_2$$

……………………

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \qquad x_{n-1} \le x \le x_n$$

en donde m_i es la pendiente de la línea recta que une los puntos:

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Estas ecuaciones se usan en la evaluación de funciones de cualquier punto entre x_o y x_n localizando primero el intervalo dentro del que se encuentra el punto. Después se usa la ecuación apropiada y se determina el valor funcional dentro del intervalo.

4.7.3.2 Interpolación segmentaria cuadrática

Para asegurar que las m-ésimas derivadas sean continuas en los nodos, se debe usar un polinomio de al menos (m +1)-ésimo orden. Los polinomios de tercer orden o cúbicos se usan más frecuentemente en la práctica asegurando continuidad en la primera y segunda derivada. Aunque las derivadas de orden superior sean discontinuas al usarse polinomios de tercer orden, en general, no se detectan visualmente y, por ende, se ignoran.

El objetivo de los polinomios cuadráticos es el de obtener un polinomio de segundo orden para cada uno de los intervalos entre los puntos. El polinomio para cada uno de los intervalos se representa generalmente como:

$$f_i(x) = a_i\, x^2 + b_i\, x + c_i \qquad (4.50)$$

Para los n + 1 puntos (i = 0, 1, 2, . . . , n), existen n intervalos y, por lo tanto, 3 n incógnitas constantes por evaluar 8 las a, las b y las c). Por lo tanto, se requieren 3 n ecuaciones o condiciones para evaluar las incógnitas. Estas son:

1. Los valores de las funciones deben ser iguales en los nodos interiores. Esta condición se representa mediante:

$$a_{i-1}\, x_{i-1}^2 + b_{i-1}\, x_{i-1} + c_{i-1} = f\,(x_{i-1}) \qquad (4.51)$$

$$a_i\, x_{i-1}^2 + b_i\, x_{i-1} + c_i = f\,(x_{i-1}) \qquad (4.52)$$

para i = 2 hasta n. Como se usan sólo nodos interiores, las ecuaciones (4.51) y (4.52) proporcionan n –1 condiciones, con un total de 2 n – n.

2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos finales. Esto agrega dos ecuaciones adicionales:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$a_1\, x_o^2 + b_1\, x_o + c_1 = f\left(x_o\right) \qquad (4.53)$$

$$a_n\, x_n^2 + b_n\, x_n + c_n = f\left(x_n\right) \qquad (4.54)$$

con un total de 2 n – 2 + 2 = 2 n condiciones.

3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales. La primera derivada en la ecuación (4.50) es:

$$f\,'(x) = 2\,a\,x + b$$

Por lo tanto, la condición se representa generalmente como:

$$2\,a_{i-1}\, x_{i-1} + b_{i-1} = 2\,a_i\, x_{i-1} + b_i \qquad (4.55)$$

para i = 2 hasta n. Esto proporciona otras n –1 condiciones con un total de 2 n + n – 1 = 3 n – 1. Debido a que hay 3 n incógnitas, se tiene una condición menos. A menos que exista una información adicional con relación a las funciones o sus derivadas, se debe escoger arbitrariamente una condición para calcular eficientemente las constantes. Aunque existen algunas alternativas diferentes que se pueden hacer, aquí se escoge la siguiente:

4. Se supone que la segunda derivada es cero en el primer punto. Ya que la segunda derivada de la ecuación (4.50) es 2 a_i esta condición se expresa matemáticamente como:

$$a_1 = 0 \qquad (4.56)$$

La interpretación visual de esta condición es que los primeros dos puntos se conectarán mediante una línea recta.

Ejemplo: Desarrollar la interpolación cuadrática segmentaria para los datos de la tabla 4.12.

Tabla 4.12

X	1	2	3	5	6
f (x)	4,75	4	5,25	19,75	36

Solución

De la primera condición se tienen las siguientes ecuaciones

$$a_1\, x_1^2 + b_1\, x_1 + c_1 = f\left(x_1\right)$$

$$4\,a_1 + 2\,b_1 + c_1 = 4$$

$$a_2\, x_1^2 + b_2\, x_1 + c_2 = f\left(x_1\right)$$

$$4\,a_2 + 2\,b_2 + c_2 = 4$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$a_2\,x_2^2+b_2\,x_2+c_2=f\left(x_2\right)$$

$$9\,a_2+3b_2+c_2=5.25$$

$$a_3\,x_2^2+b_3\,x_2+c_3=f\left(x_2\right)$$

$$9\,a_3+3b_3+c_3=5.25$$

$$a_3\,x_3^2+b_3\,x_3+c_3=f\left(x_3\right)$$

$$25\,a_3+5\,b_3+c_3=19.75$$

$$a_4\,x_3^2+b_4\,x_3+c_4=f\left(x_3\right)$$

$$25\,a_4+5\,b_4+c_4=19.75$$

De la segunda condición se tienen las siguientes ecuaciones

$$a_1\,x_0^2+b_1\,x_0+c_1=f\left(x_0\right)$$

$$a_1+b_1+c_1=4.75$$

$$a_n\,x_n^2+b_1\,x_n+c_n=f\left(x_n\right)$$

$$36\,a_4+6\,b_4+c_4=36$$

De la tercera condición se tienen las siguientes ecuaciones

$$2\,a_1\,x_1+b_1=2\,a_2\,x_1+b_2$$

$$4\,a_1+b_1=4\,a_2+b_2$$

$$2\,a_2\,x_2+b_2=2\,a_3\,x_2+b_3$$

$$6\,a_2+b_2=6\,a_3+b_3$$

$$2\,a_3\,x_3+b_3=2\,a_4\,x_3+b_4$$

$$10\,a_3+b_3=10\,a_4+b_4$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

De la cuarta condición $a_1 = 0$

Expresando todas estas ecuaciones en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & -10 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5.25 \\ 5.25 \\ 19.75 \\ 19.75 \\ 4.75 \\ 36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se tiene

$$\begin{array}{ll} b_1 = -0.75 & a_3 = -6.75 \\ c_1 = 5.5 & b_3 = 61.25 \\ a_2 = 2 & c_3 = -117.75 \\ b_2 = -8.75 & a_4 = 22.5 \\ c_2 = 13.5 & b_4 = -231.25 \\ & c_4 = 613.5 \end{array}$$

Para el segmento 1, la ecuación interpolante es

$$-0.75x + 5.5 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 1,5

$$f(1{,}5) = -0.75(1{,}5) + 5.5 = 4{,}375$$

Para el segmento 2, la ecuación interpolante es

$$2x^2 - 8.75x + 13.5 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 2,6

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f(2,6) = 2(2,6)^2 - 8.75(2,6) + 13.5 = 4,27$$

Para el segmento 3, la ecuación interpolante es

$$-6.75x^2 + 61.25x - 117.75 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 4

$$f(4) = -6.75(4)^2 + 61.25(4) - 117.75 = 19,25$$

Para el segmento 4, la ecuación interpolante es

$$22.5x^2 - 231.25x + 613.5 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 5,4

$$f(5,4) = 22.5(5,4)^2 - 231.25(5,4) + 613.5 = 20,85$$

4.7.3.3 Interpolación segmentaria cúbica

El objetivo de la interpolación cúbica segmentaria es obtener polinomios de tercer orden para cada uno de los intervalos entre nodos, de la forma

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad (4.57)$$

Por lo tanto, para los n + 1 puntos (i = 0, 1, 2, . . . , n), existen n intervalos y, por lo tanto, 4 n incógnitas constantes por evaluar. Como se hizo para los polinomios cuadráticos, ahora se requiere de 4 n condiciones para evaluar las incógnitas. Estas son:

1. Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores (2 n - 2 condiciones).

$$a_{i-1} x_{i-1}^3 + b_{i-1} x^2{}_{i-1} + c_{i-1}x + d_i = f(x_{i-1})$$
$$a_i x_{i-1}^3 + b_i x^2{}_{i-1} + c_i x + d_i = f(x_{i-1})$$

2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos finales (2 condiciones).

$$a_1 x_o^2 + b_1 x_o + c_1 x_o + d_1 = f(x_o) \qquad (4.53)$$

$$a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n = f(x_n) \qquad (4.54)$$

3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales (n -1 condiciones).

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Por lo tanto, la condición se representa generalmente como:

$$3a_{i-1}\,x_{i-1}^2 + 2b_{i-1}\,x_{i-1} + c_{i-1} = 3a_i\,x_{i-1}^2 + 2b_i\,x_{i-1} + c_{i-1}$$

4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales (n - 1 condiciones).

$$f''(x) = 6a\,x + 2b$$

$$6a_{i-1}\,x_{i-1} + 2b_{i-1} = 6a_i\,x_{i-1} + 2b_i$$

5. Las segundas derivadas en los nodos inicial y final son cero (2 condiciones).

$$6a_0\,x + 2\,b_0 = 0$$

$$6a_n\,x + 2\,b_n = 0$$

Ejemplo: Desarrollar la interpolación cúbica segmentaria para los datos de la tabla 4.13.

Tabla 4.13

X	1	2	3	5	6
f (x)	4.75	4	5.25	19.75	36

Solución

De la primera condición se tienen las siguientes ecuaciones

$$a_1\,x_1^3 + b_1\,x_1^2 + c_1\,x_1 + d_1 = f\left(x_1\right)$$

$$8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = 4$$

$$a_2\,x_1^3 + b_2\,x_1^2 + 2c_2 + d_2 = f\left(x_1\right)$$

$$8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 = 4$$

$$a_2\,x_2^3 + b_2\,x_2^2 + c_2\,x_2 + d_2 = f\left(x_2\right)$$

$$27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 5.25$$

$$a_3\,x_2^3 + b_3\,x_2^2 + c_3\,x_2 + d_3 = f\left(x_2\right)$$

$$27a_3 + 9b_3 + 3\,c_3 + d_3 = 5.25$$

$$a_3\,x_3^3 + b_3\,x_3^2 + c_3\,x_3 + d_3 = f\left(x_3\right)$$

$$125a_3 + 25b_3 + 5\,c_3 + d_3 = 19.75$$

$$a_4\,x_3^3 + b_4\,x_3^2 + c_4\,x_3 + d_4 = f\left(x_3\right)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$125a_4 + 25b_4 + 5c_4 + d_4 = 19.75$$

De la segunda condición se tienen las siguientes ecuaciones

$$a_1 x_0^3 + b_1 x_/^2 + c_1 x_/ + d_/ = f(x_0)$$

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 4.75$$

$$a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n = f(x_n)$$

$$216a_4 + 36b_4 + 6c_4 + d_4 = 36$$

De la tercera condición se tienen las siguientes ecuaciones

$$3a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 + c_1 = 3a_2 x_1^2 + b_2 x_2 + c_2$$

$$12a_1 + 4b_1 + c_1 = 12a_2 + 4b_2 + c_2$$

$$3a_2 x_2^2 + 2b_2 x_2 + c_2 = 3a_3 x_2^2 + 2b_3 x_2 + c_3$$

$$27a_2 + 6b_2 + c_2 = 27a_3 + 6b_3 + c_3$$

$$3a_3 x_3^2 + 2b_3 x_3 + c_3 = 3a_4 x_3^2 + 2b_4 x_3 + c_4$$

$$75a_3 + 10b_3 + c_3 = 75a_4 + 10b_4 + c_4$$

De la cuarta condición

$$6a_1 x_1 + 2b_1 = 6a_2 x_2 + 2b_2$$
$$12a_1 + 2b_1 = 12a_2 + 2b_2$$

$$6a_2 x_2 + 2b_2 = 6a_3 x_2 + 2b_3$$
$$18a_2 + 2b_2 = 18a_3 + 2b_3$$

$$6a_3 x_3 + 2b_3 = 6a_4 x_3 + 2b_4$$
$$30a_3 + 2b_3 = 30a_4 + 2b_4$$

De la quinta condición

$$6a_1 x_0 + 2b_1 = 0$$
$$6a_1 + 2b_1 = 0$$

$$6a_4 x_4 + 2b_4 = 0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$36\,a_4 + 2\,b_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix}
8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 216 & 36 & 6 & 1 \\
12 & 4 & 1 & 0 & -12 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 10 & 1 & 0 & -75 & -10 & -1 & 0 \\
12 & 2 & 0 & 0 & -12 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 & -30 & -2 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 2 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5,25 \\ 5,25 \\ 19,75 \\ 19,75 \\ 4,75 \\ 36 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{llll}
a_1 = 0{,}377049 & a_2 = 0{,}114754 & a_3 = 0{,}422131 & a_4 = -1{,}336065 \\
b_1 = -1{,}131147 & b_2 = 0{,}442623 & b_3 = -2{,}323770 & b_4 = 24{,}049180 \\
c_1 = 0{,}004098 & c_2 = -3{,}143442 & c_3 = 5{,}155738 & c_4 = -126{,}709016 \\
d_1 = 5{,}5 & d_2 = 7{,}598361 & d_3 = -0{,}700819 & d_4 = 219{,}07377
\end{array}$$

Para el segmento 1, la ecuación interpolante es

$$0{,}377049\,x^3 - 1{,}131147\,x^2 + 0{,}004098\,x + 5{,}5 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 1,5

$$f(1{,}5) = 0{,}377049\,(1{,}5)^3 - 1{,}131147\,(1{,}5)^2 + 0{,}004098\,(1{,}5) + 5{,}5 = 4{,}233607$$

Para el segmento 2, la ecuación interpolante es

$$0{,}114754\,x^3 + 0{,}442623\,x^2 - 3{,}143442\,x + 7{,}598361 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 2,6

$$f(2{,}6) = 0{,}114754\,(2{,}6)^3 + 0{,}442623\,(2{,}6)^2 - 3{,}143442\,(2{,}6) + 7{,}598361 = 4{,}434459$$

Para el segmento 3, la ecuación interpolante es

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$0{,}422131x^3 - 2{,}323770\ x^2 + 5{,}155738\ x - 0{,}700819 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 4

$$f(4) = 0{,}422131\ (4)^3 - 2{,}323770\ (4)^2 + 5{,}155738\ (4) - 0{,}700819 = 9{,}758197$$

Para el segmento 4, la ecuación interpolante es

$$-1{,}336065x^3 + 24{,}049180\ x^2 - 126{,}709016\ x + 219{,}07377 = 0$$

Ejemplo, para determinar el valor de la función para x = 5,4

$$f(5{,}4) = -1{,}336065(5{,}4)^3 + 24{,}049180\ (5{,}4)^2 - 126{,}709016\ (5{,}4) + 219{,}07377 = 25{,}737033$$

Solución

Emplear la ecuación correspondiente, para generar un conjunto de ecuaciones simultáneas que se usarán en la determinación de las segundas derivadas en los nodos. Por ejemplo, en el primer nodo interior y subsiguientes, se usarán los datos siguientes:

$x_o = 1$	$f(x_o) = 4{,}75$
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 4$
$x_2 = 3$	$f(x_2) = 5{,}25$
$x_3 = 5$	$f(x_3) = 19{,}75$
$x_4 = 6$	$f(x_4) = 36$

Estos valores se sustituyen en la ecuación y se obtiene para i = 1

$$(x_i - x_{i-1})\ f''(x_{i+1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})\ f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\ f''(x_{i+1}) = \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

$$(2-1)\ f''(1) + 2(3-1)\ f''(2) + (3-2)\ f''(3) = \frac{6}{(3-2)}[5.25 - 4] + \frac{6}{(2-1)}[4.75 - 4]$$

Debido a la condición natural de los polinomios, f "(1) = 0, y la ecuación se reduce a

$$4f''(2) + f'''(3) = 12$$

De manera similar, la ecuación se aplica al segundo nodo interior (i = 2)

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$(3-2)\,f''(2)+2(5-2)\,f''(3)+(5-3)\,f''(5)=\frac{6}{(5-3)}[19.75-5.25\,]+\frac{6}{(3-2)}[4-5.25\,]$$

$$f''(2)+6f''(3)+2f''(5)=36$$

De igual manera para el tercer nodo interior (i = 3)

$$(5-3)\,f''(3)+2(6-3)\,f''(5)+(6-5)\,f''(6)=\frac{6}{(6-5)}[36-19.75\,]+\frac{6}{(5-3)}[5.25-19.75\,]$$

$$2f''(3)+6f''(5)=54$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$4f''(2)+f''(3)=12$$

$$f''(2)+6f''(3)+2f''(5)=36$$

$$2f''(3)+6f''(5)=54$$

y se obtiene:

f " (2) = 2,262295

f " (3) = 2,950819

f " (5) = 8,016394

Se determina el polinomio interpolante cúbico segmentario para el primer segmento usando la siguiente ecuación correspondiente

$$f_i(x)=\frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i-x_{i-1})}(x_i-x)^3+\frac{f''(x_i)}{6(x_i-x_{i-1})}(x-x_{i-1})^3+\left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f''(x_{i-1})\,(x_i-x_{i-1})}{6}\right](x_i-x)$$
$$+\left[\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f''(x_i)\,(x_i-x_{i-1})}{6}\right](x-x_{i-1})$$

Para el primer segmento (i =1)

No se debe olvidar que f " (1) = f " (6) = 0

$$f_i(x)=0+\frac{2.262295}{6(2-1)}(x-1)^3+\left[\frac{4.75}{2-1}-0\right](2-x)+\left[\frac{4}{2-1}-\frac{2.262295\,(2-1)}{6}\right](x-1)$$

$$f_1(x)=0.377049(x-1)^3+4.75(2-x)+3.622951(x-1)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para el segundo segmento (i = 2)

$$f_2(x)=\frac{2.262295}{6(3-2)}(3-x)^3+\frac{2.950819}{6(3-2)}(x-2)^3+\left[\frac{4}{3-2}-\frac{2.262295\ (3-2)}{6}\right](3-x)$$
$$+\left[\frac{5.25}{3-2}-\frac{2.950819\ (3-2)}{6}\right](x-2)$$

$$f_2(x)=0.377049(3-x)^3+0.491803(x-2)^3+3.622951(3-x)+4.758197(x-2)$$

Para el tercer segmento (i = 3)

$$f_3(x)=\frac{2.950819}{6(5-3)}(5-x)^3+\frac{8.016394}{6(5-3)}(x-3)^3+\left[\frac{5.25}{5-3}-\frac{2.950819\ (5-3)}{6}\right](5-x)$$
$$+\left[\frac{19.75}{5-3}-\frac{8.016394\ (5-3)}{6}\right](x-3)$$

$$f_3(x)=0.245902(5-x)^3+0.668033(x-3)^3+0.657787(5-x)+7.202869(x-3)$$

Para el cuarto segmento (i = 4)

$$f_4(x)=\frac{8.016394}{6(6-5)}(6-x)^3+0+\left[\frac{19.75}{6-5}-\frac{8.016394\ (6-5)}{6}\right](6-x)+\left[\frac{36}{6-5}-0\right](x-5)$$

$$f_4(x)=1.336066(6-x)^3+18.413934(6-x)+36(x-5)$$

4.8 PROBLEMAS DE APLICACIÓN A LA INGENIERÍA

1. La velocidad del fluido que circula por un canal abierto de hormigón alisado viene dado por la siguiente ecuación: (Conde & Schiavi, 2013)

$$v=a\,R_h^b S^c$$

Si experimentalmente se llegan a determinar los resultados que se dan en la tabla 4.14, determinar los coeficientes de dicho modelo

Tabla 4.14

Rh	2,5	2,5	2,5	3	3	3	3,5	3,5	3,5
S	0,001	0,005	0,01	0,001	0,005	0,01	0,001	0,005	0,01
V	4,892971	10,941015	15,472932	5,525354	12,355067	17,472704	19,363832	6,123381	13,692297

Para linealizar la ecuación se aplica logaritmos y se obtiene la tabla correspondiente de valores

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\log v = \log a + b\log R_h + c\log S$$

Tabla 4.15

Log Rh	**log S**	**log V**	**(log Rh)^2**	**(log S)^2**	**x1*x2**	**x1*y**	**x2*y**
0,39794001	-3	0,689572625	0,15835625	9	-1,19382003	0,27440854	-2,06871788
0,39794001	-2,30103	1,039057627	0,15835625	5,29473904	-0,9156719	0,4134826	-2,39090277
0,39794001	-2	1,189572625	0,15835625	4	-0,79588002	0,47337854	-2,37914525
0,47712125	-3	0,742360123	0,22764469	9	-1,43136376	0,35419579	-2,22708037
0,47712125	-2,30103	1,091845125	0,22764469	5,29473904	-1,09787032	0,52094252	-2,51236838
0,47712125	-2	1,242360123	0,22764469	4	-0,95424251	0,59275642	-2,48472025
0,54406804	-2	1,286991316	0,29601004	4	-1,08813609	0,70021085	-2,57398263
0,54406804	-3	0,786991316	0,29601004	9	-1,63220413	0,42817683	-2,36097395
0,54406804	-2,30103	1,136476318	0,29601004	5,29473904	-1,25191689	0,61832045	-2,6150661
4,25738792	**-21,90309**	**9,205227197**	**2,04603294**	**54,8842171**	**-10,3611056**	**4,37587253**	**-21,6129576**

Se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 9 & 4.257388 & -21.90309 \\ 4.257388 & 2.046033 & -10.361106 \\ -21.90309 & -10.361106 & 54.884217 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.205227 \\ 4.375872 \\ -21.612958 \end{bmatrix}$$

$$\log a_0 = 1.924284 \qquad a_0 = 84$$
$$a_1 = 0.666667$$
$$a_2 = 0.5$$

por lo tanto, el modelo es

$$v = 84\, R_h^{0.666667} S^{0.5}$$

2. Para un trabajo de investigación se requiere conocer la conductividad térmica K del cobre puro a 500 ºC, en un libro de transferencia de calor se obtiene los siguientes datos: (Estela Urbina et al., 2022)

Tabla 4.16

T (ºC)	0	100	200	300	400	600
K(W/m ºK)	386	379	374	369	363	353

Solución

Se tiene que realizar para esto una interpolación, para este caso se va a utilizar el método de Newton por lo tanto se calcula las diferencias finitas

Diferencias finitas de primer orden

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{379 - 386}{100 - 0} = -0.07$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{374-379}{200-100}=-0.05$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{369-374}{300-200}=-0.05$$

$$f[x_3,x_4]=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=\frac{363-369}{400-300}=-0.06$$

$$f[x_4,x_5]=\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}=\frac{353-363}{600-400}=-0.05$$

Diferencias finitas de segundo orden

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{-0.05+0.07}{200-0}=0.0001$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}=\frac{-0.05+0.05}{300-100}=0$$

$$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}=\frac{-0.06+0.05}{400-200}=-0.00005$$

$$f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}=\frac{-0.05+0.06}{600-300}=0.00003333$$

Diferencias finitas de tercer orden

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}=\frac{0-0.0001}{300-0}=-3.3333x10^{-7}$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}=\frac{-0.0005-0}{400-100}=1.6667x10^{-7}$$

$$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}=\frac{3.3333x10^{-5}+0.00005}{600-200}=2.0833x10^{-7}$$

Diferencias finitas de cuarto orden

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}=\frac{-1.6667x10^{-7}+3.3333x10^{-7}}{400-0}=4.1667x10^{-10}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f\left[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right]=\frac{f\left[x_2,x_3,x_4,x_5\right]-f\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]}{x_4-x_0}=\frac{2.0833x10^{-7}+1.6667x10^{-7}}{600-100}=7.5x10^{-10}$$

Diferencias finitas de quinto orden

$$f\left[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right]=\frac{f\left[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right]-f\left[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4\right]}{x_5-x_0}=\frac{7.5x10^{-10}+4.1667x10^{-10}}{600-0}=5.5556x10^{-13}$$

Con estos valores se obtiene el polinomio de interpolación según la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}f_n(x)=&\ f(x_0)+(x-x_0)f\left[x_0,x_1\right]+(x-x_0)(x-x_1)f\left[x_0,x_1,x_2\right]+\cdots\\&+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f\left[x_n,x_{n-1},\cdots,x_0\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_5(500)=&\ 386+(500-0)(-0.07)+(500-0)(500-100)(0.0001)+(500-0)(500-100)(500-200)\\&(-3.3333x10^{-7})+(500-0)(500-100)(500-200)(500-300)(4.1667x10^{-10})+(500-0)(500-100)\\&(500-200)(500-300)(500-400)(5.5556x10^{-13})\end{aligned}$$

$$f_5(500)=356.666912$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

CAPITULO 5.

5. INTEGRACION Y DIFERENCIACION NUMERICA

5.1 INTEGRACION MEDIANTE LAS FORMULAS DE NEWTON-COTES

Las fórmulas de integración de Newton-Cotes son las más conocidas y fáciles de aplicar. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por una función aproximada que sea más fácil de integrar:

Se conoce que según el método analítico la integral de una función f (x) desde x = a hasta x = b es igual a

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx \qquad (5.1)$$

en donde p (x) es un polinomio de la forma:

$$p(x) = a_o + a_1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \qquad (5.2)$$

en donde n es el orden del polinomio.

Dentro de las fórmulas de integración de Newton-Cotes tenemos las fórmulas cerradas y abiertas. Las fórmulas cerradas son aquéllas en donde los puntos al principio y al final de los límites de integración se conocen (Fig. 5.1).

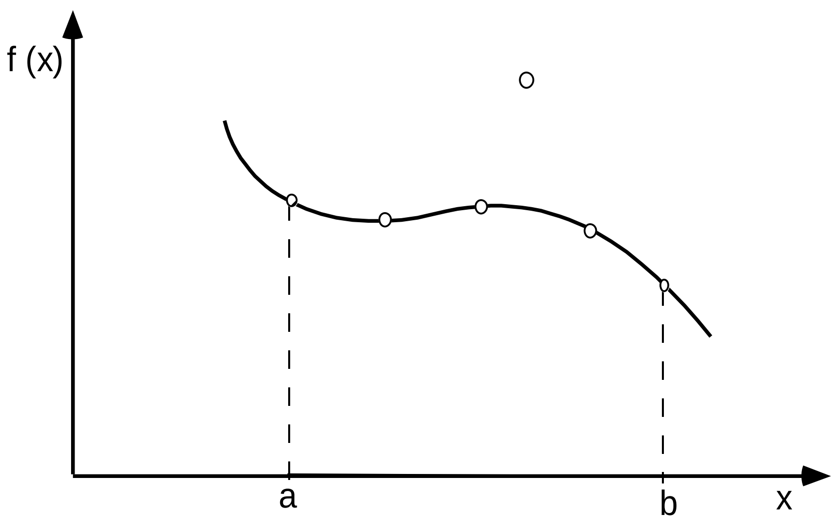


Figura 5.1. Representación de las fórmulas de integración cerrada

ISBN: 978-631-6557-41-4

Las fórmulas abiertas son aquellas que tienen los límites de integración extendidos más allá del rango de los datos (Fig. 5.2). En este sentido, se parecen a la extrapolación. Las fórmulas abiertas de Newton-Cotes, en general no se usan en la integración definida, pero ampliamente en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

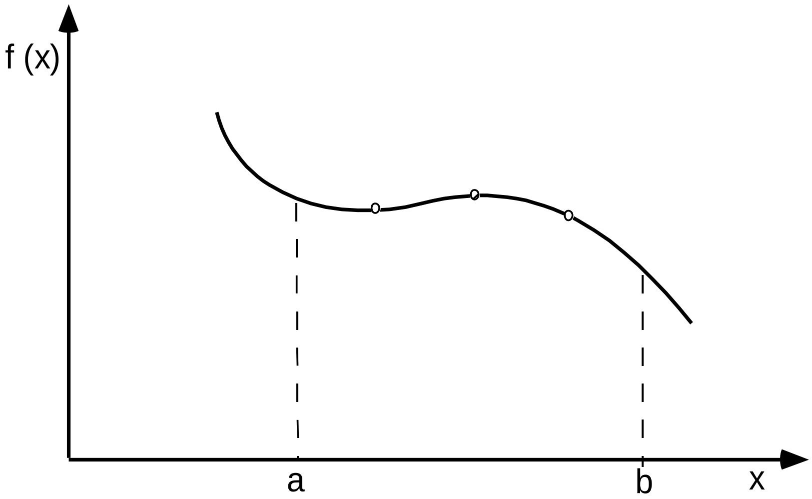


Figura 5.2. Representación de las fórmulas de integración abierta

5.1.1 Formulas Cerradas De Newton-Cotes

5.1.1.1 Regla del trapecio. Consiste en reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por un polinomio de primer orden, es decir

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_1(x)\,dx \tag{5.3}$$

El polinomio $p_1(x)$ de primer orden que es una línea recta se puede representar como:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \tag{5.4}$$

$$I \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx$$

Después de integrar y reordenar términos, se obtiene la regla del Trapecio

$$I \approx (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{5.5}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se llama formula del trapecio por cuanto según la geometría tenemos que el área de un trapecio es

$$I \approx ancho\ x\ altura\ \ promedio$$

$$I \approx (b-a)\ x\ altura\ \ promedio$$

en donde, para la formula del trapecio, la altura promedio de los valores de la función en los puntos extremos es

$$altura\ \ promedio = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Por lo tanto

$$I \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

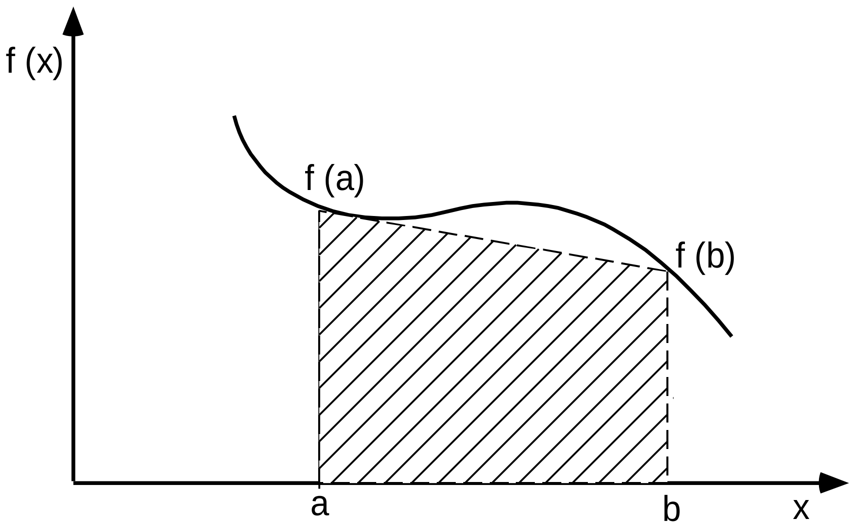


Figura 5.3. Esquema gráfico de la regla trapezoidal

ERROR EN LA FORMULA TRAPEZOIDAL

Cuando se emplea la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar la integral bajo una curva, se incurre lógicamente en un error que puede ser representativo. Una estimación del error de truncamiento de una sola aplicación de la regla trapezoidal se puede determinar mediante

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \qquad (5.6)$$

en donde ξ es un punto cualquiera dentro del intervalo de a hasta b.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Ejemplo:

Integrar la función f (x) desde a = 0 hasta b = 1.

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

Solución

Método analítico

$$I = \int_0^1 \left[30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8\right]dx$$

$$I = \left[5x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 8x\right]_0^1$$

$$I = 11$$

Métodos numéricos

Regla trapezoidal simple. Se deben determinar los valores de la función en x = 0 y en x = 1, para aplicar la regla trapezoidal simple

f (0) = 8 f (1) = 39

$$I \approx (b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$I \approx (1-0)\frac{8+39}{2} = 23.5$$

Se determina el error con el fin de mejorar el valor aproximado de la integral obtenido mediante la regla trapezoidal simple, para lo cual calculamos la segunda derivada media de la función a integrar

$$Segunda\ derivada\ media = \frac{\int_a^b f''(x)\,dx}{b-a} \qquad (5.7)$$

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

$$f'(x) = 150x^4 - 80x^3 + 84x^2 + 18x - 16$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$f''(x) = 600x^3 - 240x^2 + 168x + 18$$

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

$$\bar{f}'' = \frac{\int_0^1 \left[600x^3 - 240x^2 + 168x + 18\right] dx}{1-0}$$

$$\bar{f}'' = \frac{\left[150x^4 - 80x^3 + 84x + 18x\right]_0^1}{1-0} = 172$$

$$E_t = -\frac{1}{12}(172)(1-0)^3 = -14.333333$$

$$I_{exacta} = I_{aproximada} + Error \qquad (5.8)$$

$$I_{exacta} = 23.5 - 14.333333 = 9.166667$$

Si bien es cierto, con el cálculo del error no se llega a obtener el valor exacto de la integral, pero sin embargo se lograr mejorar el valor aproximado de la integral.

5.1.1.2 REGLA DEL TRAPECIO DE SEGMENTOS MULTIPLES

Una manera de mejorar la exactitud de la formula trapezoidal es la de dividir el intervalo de integración de a hasta b en un conjunto de segmentos y aplicar el método a cada uno de los segmentos. Luego se suman las áreas de los segmentos individuales y se obtiene la integral sobre el intervalo completo. A la formula resultante se conoce como la fórmula de integración de segmentos múltiples o de integración compuesta.

Si el ancho de integración se divide en n segmentos uniformes se tiene:

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad (5.9)$$

Si a y b se igualan a x_o y a x_n, respectivamente, la integral total se representa como

$$I = \int_{x_o}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla trapezoidal para cada una de las integrales, se obtiene

$$I \approx h\,\frac{f(x_1) + f(x_o)}{2} + h\,\frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \cdots + h\,\frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

agrupando términos, se tiene

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f\ (x_o) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i) + f\,(x_n) \right] \tag{5.10}$$

$$I \approx (b-a)\ \frac{f\ (x_o) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i) + f\,(x_n)}{2n} \tag{5.11}$$

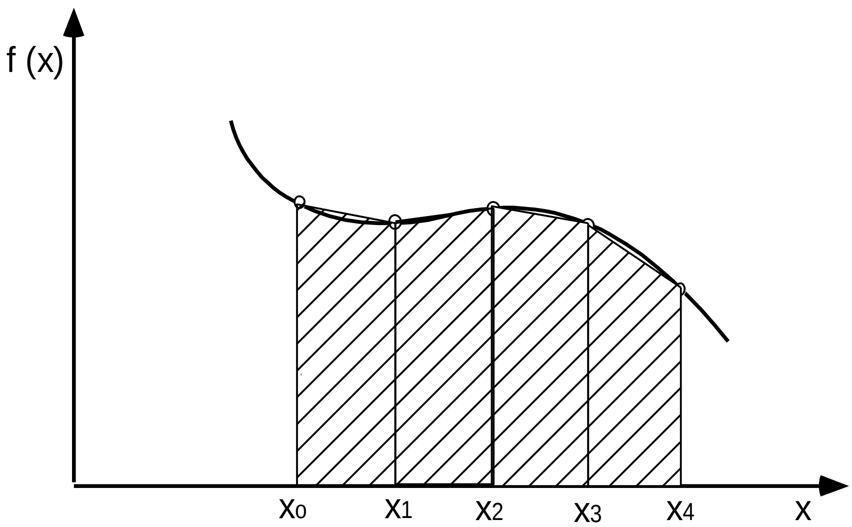


Figura 5.4. Representación gráfica de la regla trapezoidal múltiple

El error en la regla trapezoidal múltiple se obtiene sumando los errores individuales de cada uno de los segmentos

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\bar{f}'' \tag{5.12}$$

Ejemplo:

Integrar la función f (x) desde a = a hasta b = 1.

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

Solución

Se divide el segmento de integración por ejemplo en 10 segmentos, por lo tanto, el paso h será

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

f (0) = 8	f (0,6) =7,4288
f (0,1) = 6,5163	f (0,7) = 11,0541
f (0,2) = 5,3616	f (0,8) = 16,9344
f (0,3) = 4,6769	f (0,9) = 25,8947
f (0,4) = 4,6272	f (1) = 39
f (0,5) = 5,4375	

Usando la regla trapezoidal de segmentos múltiples se tiene

$$I \approx (1-0)\frac{8+2(6.5163+5.3616+4.6769+\cdots+11.0541+16.9344+25.8947)+39}{2(10)}$$

$$I \approx 11.14315$$

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}'' = -\frac{(1-0)^3}{12(10)}(172) = -0.143333$$

$$I_{exacta} = 11.14315 - 0.143333 = 10.999817 \approx 11$$

Al analizar el resultado obtenido con la regla trapezoidal, se puede concluir que, al utilizar un mayor número de segmentos, se aproxima este al valor exacto.

5.1.1.3 REGLA DE SIMPSON

REGLA DE SIMPSON DE 1/3. Consiste en reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por un polinomio de segundo orden, es decir

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx \qquad (5.13)$$

El polinomio p_2 (x) de segundo orden se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden:

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$I \approx \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx$$

Después de integrar y reordenar términos, se obtiene la regla de Simpson de 1/3

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] \tag{5.14}$$

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}\right] \tag{5.15}$$

Se puede demostrar que una simple aplicación de la regla de Simpson de 1/3 tiene un error de truncamiento de

$$E = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{5.16}$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \tag{5.17}$$

Ejemplo:

Integrar la función f (x) desde a = a hasta b = 1.

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

Solución

Se divide el segmento de integración en este caso para utilizar la regla de Simpson de 1/3 en 2 segmentos, por lo tanto, el paso h será

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = 0.5$$

f (0) = 8
f (1) = 39
f (0.5) =5,4375

Usando la regla se Simpson de 1/3 se tiene

$$I \approx (1-0)\left[\frac{8+5.4375+39}{6}\right] = 8.739583$$

REGLA DE SIMPSON DE 1/3 DE SEGMENTOS MULTIPLES. Una manera de mejorar la exactitud de la Regla de Simpson de 1/3 es la de dividir el intervalo de integración de a hasta b en un conjunto de segmentos y aplicar el método a cada uno de los segmentos.

Si el ancho de integración se divide en n segmentos uniformes se tiene:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Si a y b se igualan a x_o y a x_n, respectivamente, la integral total se representa como

$$I = \int_{x_o}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla de Simpson para cada una de las integrales, se obtiene

$$I \approx 2h\,\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h\,\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \cdots + 2h\,\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

agrupando términos, se tiene

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_o) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right] \qquad (5.18)$$

$$I \approx (b-a)\,\frac{f(x_o) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n} \qquad (5.19)$$

$$E = -\frac{8}{45} h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad (5.20)$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,\bar{f}^{(4)} \qquad (5.21)$$

Ejemplo:

Integrar la función f (x) desde a = a hasta b = 1.

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

Solución

Se divide el segmento de integración por ejemplo en 10 segmentos, por lo tanto, el paso h será

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

f (0) = 8
f (0,1) = 6,5163
f (0,2) = 5,3616
f (0,3) = 4,6769
f (0,4) = 4,6272
f (0,5) = 5,4375

f (0.6) =7,4288
f (0,7) = 11,0541
f (0,8) = 16,9344
f (0,9) = 25,8947
f (1) = 39

ISBN: 978-631-6557-41-4

Usando la regla de Simpson de 1/3 de segmentos múltiples se tiene

$$I \approx \frac{0.1}{3}\left[8+4(6.5163+4.6769+\cdots+11.0541+25.8947)+2(5.3616+4.6272+7.4288+16.9344)+39\right]$$

$$I \approx 11.000733$$

$$Cuarta\ derivada\ media = \frac{\int_a^b f^{IV}(x)\,dx}{b-a}$$

Por lo tanto, para calcular el error, se debe obtener la cuarta derivada de la función y luego integrar

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

$$f'(x) = 150x^4 - 80x^3 + 84x^2 + 18x - 16$$

$$f''(x) = 600x^3 - 240x^2 + 168x + 18$$

$$f'''(x) = 1800x^2 - 480x + 168$$

$$f^{IV}(x) = 3600x - 480$$

$$\bar{f}'' = \frac{\int_0^1 [3600x - 480]dx}{1-0} = \frac{\left[1800x^2 - 480x\right]_0^1}{1-0} = 1320$$

$$\bar{f}'' = \frac{\left[150x^4 - 80x^3 + 84x + 18x\right]_0^1}{1-0} = 172$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\,\bar{f}^{(4)} = -\frac{(1-0)^5}{180(10)^4}(1320) = -0.000733$$

$$I_{exacta} = 11.000733 - 0.000733 = 11$$

REGLA DE SIMPSON DE 3/8. Consiste en reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulados por un polinomio de tercer orden, es decir

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_3(x)\,dx \qquad (5.22)$$

El polinomio p_3 (x) de segundo orden se representa mediante un polinomio de Lagrange de tercer orden:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

Después de integrar y reordenar términos, se obtiene la regla de Simpson de 3/8

$$I \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \tag{5.23}$$

$$I \approx (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]}{8} \tag{5.24}$$

$$E = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) \tag{5.25}$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) \tag{5.26}$$

5.1.1.4 INTEGRACION USANDO INTERVALOS DESIGUALES

En la práctica, existen muchos casos en donde las fórmulas de integración no se basan en puntos igualmente espaciados y se debe tratar con diferentes tamaños de segmentos. En estos casos, un método es aplicar la regla trapezoidal a cada uno de los segmentos y luego sumar los resultados.

$$I \approx h_1 \frac{f(x_1) + f(x_o)}{2} + h_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2} \tag{5.27}$$

en donde h_i es el ancho del segmento i.

5.1.1.5 FORMULAS DE INTEGRACION ABIERTAS

Existen también fórmulas de integración abiertas cuya aplicación es parecida a las fórmulas cerradas, por lo que no se realizará su aplicación. A continuación, se dan las principales fórmulas de integración abiertas:

Segmentos	**Puntos**	**Fórmula**	**Error**
2	1	$(b-a)\ f(x_1)$	$\left(\frac{1}{3}\right) h^3 f''(\xi)$

ISBN: 978-631-6557-41-4

3	2	$(b-a)\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)h^3 f''(\xi)$
4	3	$(b-a)\dfrac{2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)}{3}$	$\left(\dfrac{14}{45}\right)h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	4	$(b-a)\dfrac{11f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+11f(x_4)}{24}$	$\left(\dfrac{95}{144}\right)h^5 f^{(4)}(\xi)$
6	5	$(b-a)\dfrac{11f(x_1)-14f(x_2)+26f(x_3)-14f(x_4)+11f(x_5)}{20}$	$\left(\dfrac{41}{140}\right)h^7 f^{(6)}(\xi)$

5.2 INTEGRACION DE ROMBERG

Por definición tenemos que una integral exacta es igual a:

$$I = I(h) + E(h)$$

Si se obtienen dos aproximaciones de la misma integral, pero con distintos pasos h_1 y h_2, se tiene:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \qquad (5.28)$$

A partir de la formula del error de la regla trapezoidal de segmentos múltiples se puede llegar a demostrar que

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2} \qquad (5.29)$$

Despejando E (h_1) de la (5.29) y reemplazando en la ecuación (5.28) se tiene

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \approx I(h_2) + E(h_2)$$

$$E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

Despejando E (h_2) y reemplazando en I = I (h_2) + E (h_2) se tendrá finalmente

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$I \approx I(h_2) + \left[\frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} \right] \left[I(h_2) - I(h_1) \right] \qquad (5.30)$$

En el caso especial en que el intervalo se divide en dos partes ($h_2 = h_1/2$), la ecuación se transforma en

$$I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1) \qquad (5.31)$$

Dos estimaciones mejoradas, pueden a la vez, combinarse para obtener todavía una mejor estimación de 0(h^6), mediante la siguiente ecuación

$$I \approx \frac{16}{15} I(h_2) - \frac{1}{15} I(h_1) \qquad (5.32)$$

De manera similar dos resultados 0 (h^6) se combinan para calcular una integral que es 0(h^8), mediante la siguiente ecuación

$$I \approx \frac{64}{63} I(h_2) - \frac{1}{63} I(h_1) \qquad (5.33)$$

La ecuación proporciona la forma de combinar dos aplicaciones de la regla trapezoidal con error 0(h^2) y calcular una estimación de 0(h^4). El algoritmo que implementa la extrapolación de Richardson en su forma más eficiente se llama integración de Romberg.

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1} \qquad (5.34)$$

Ejemplo:

Integrar la función f (x) desde a = 0 hasta b = 1.

$$f(x) = 30x^5 - 20x^4 + 28x^3 + 9x^2 - 16x + 8$$

Solución

Se determina la función en los puntos necesarios para aplicar la regla del trapecio con 1, 2, 3, 4 y 8 segmentos.

f (0) = 8
f (0,125) = 6,191345

f (0.625) =8,160828
f (0,75) = 13,666015

ISBN: 978-631-6557-41-4

f (0,25) = 4,951172
f (0,375) = 4,569153
f (0,5) = 5,4375
f (0,875) = 23,312073
f (1) = 39

Paso h = 1

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$I \approx (1-0)\frac{8+39}{2} = 23.5$$

Paso h = 0,5

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = 0.5$$

$$I \approx (1-0)\frac{8+2(5.4375)+39}{2(2)} = 14.46875$$

Paso h = 0,25

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

$$I \approx (1-0)\frac{8+2(4.951172+5.4375+13.666015)+39}{2(4)} = 11.888672$$

Paso h = 0,125

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0.125$$

$$I \approx (1-0)\frac{8+2(6.191345+4.951172+4.569153+5.4375+8.160828+13.666015+23.312073)+39}{2(8)}$$

$$I \approx 11.223511$$

Se combinan los resultados y se aplica la ecuación (4.31) y se tiene

$$I \approx \frac{4}{3}(14.46875) - \frac{1}{3}(23.5) = 11.45833$$

$$I \approx \frac{4}{3}(11.888672) - \frac{1}{3}(14.46875) = 11.028646$$

$$I \approx \frac{4}{3}(11.223511) - \frac{1}{3}(11.888672) = 11.001791$$

Se combinan los resultados y se aplica la ecuación (4.32) y se tiene

$$I \approx \frac{16}{15}(11.028646) - \frac{1}{15}(11.458333) = 11.0000002$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$I \approx \frac{16}{15}(11.001791) - \frac{1}{15}(11.028646) = 11.0000003$$

Finalmente se combinan los resultados, se aplica la ecuación (4.33) y se tiene la mejor aproximación a la integral

$$I \approx \frac{64}{63}(11.0000003) - \frac{1}{63}(11.0000002) = 11.000000$$

5.3 INTEGRACION MEDIANTE LA CUADRATURA GAUSSIANA

Las fórmulas de Newton-Cotes se derivaron integrando los polinomios interpolantes, empleando valores de la función en puntos equidistantes. La cuadratura gaussiana selecciona los puntos de evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada. Se escogen los nodos x_1, x_2, …,x_n en el intervalo [a, b] y los coeficientes c_1, c_2, …,c_n para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación.

5.3.1 Cuadratura De Gauss Legendre

Este método consiste en el cambio de variable "x" a "t", para esto se utiliza las siguientes relaciones

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)t}{2}$$

$$d\,x = \frac{(b-a)\,d\,t}{2}$$

Una vez realizado el cambio de variable, se cambia al mismo tiempo el rango de integración y la integral en forma aproximada se convierte en una sumatoria del producto c_i f (x_i).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} f(t)\,d\,t \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\ f(x_i) \qquad (5.\ 35)$$

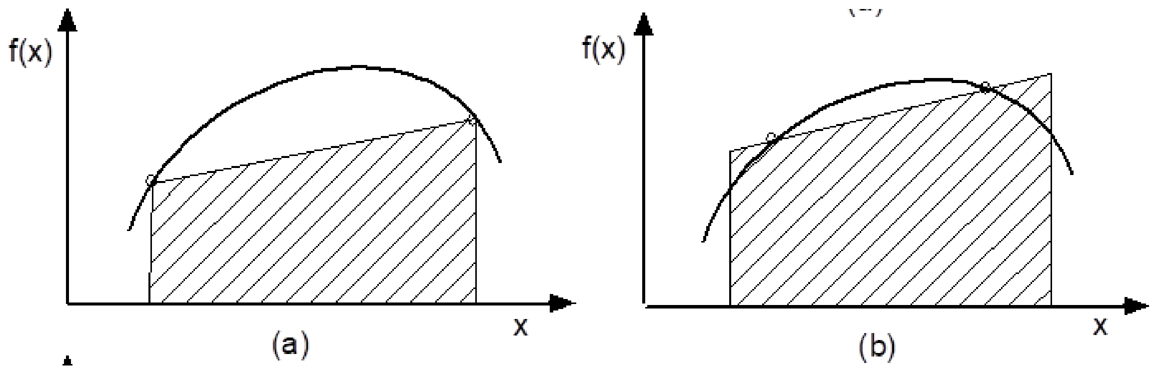


Figura 5.5. a) Representación gráfica de la regla trapezoidal
b) Representación de la cuadratura con dos puntos

ISBN: 978-631-6557-41-4

TABLA 5.1. FACTORES DE PESO **c** Y ARGUMENTOS **t** DE LA FUNCION USADOS E LAS FORMULAS DE GAUSS-LEGENDRE

Puntos	**Factores de peso**	**Arg. de la función**	**Error**
2	C_1= 1,000 000 000 C_2 =1,000 000 000	t_1 = -0,577 350 269 t_2 = 0,577 350 269	$f^{(4)}(\xi)$
3	C_1 = 0,555 555 556 C_2 = 0,888 888 888 C_3 = 0,555 555 556	t_1 = -0,774 596 669 t_2 = 0,0 t_3 = 0,774 596 669	$f^{(6)}(\xi)$
4	C_1 = 0,347 854 845 C_2 = 0,652 145 155 C_3 = 0,652 145 155 C_4 = 0,347 854 845	t_1 = -0,861 136 312 t_2 = -0,339 981 044 t_3 = 0,339 981 044 t_4 = 0,861 136 312	$f^{(8)}(\xi)$
5	C_1 = 0,236 926 885 C_2 = 0,478 628 670 C_3 = 0,568 888 889 C_4 = 0,478 628 670 C_5 = 0,236 926 885	t_1 = -0,906 179 846 t_2 = -0,538 469 310 t_3 = 0,0 t_4 = 0,538 469 310 t_5 = 0,906 179 846	$f^{(10)}(\xi)$
6	C_1 = 0,171 324 492 C_2 = 0,360 761 573 C_3 = 0,467 913 935 C_4 = 0,467 913 935 C_5 = 0,360 761 573 C_6 = 0,171 324 492	t_1 = -0,932 469 514 t_2 = -0,661 209 386 t_3 = -0,238 619 186 t_4 = 0,238 619 186 t_5 = 0,661 209 386 t_6 = 0,932 469 514	$f^{(12)}(\xi)$

(Chapra & Canale, 2015)

Ejemplo 1.

Integrar $\int_0^1 17^{2.5x}dx$

Solución

Se realiza el cambio de variables utilizando las fórmulas correspondientes

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)t}{2} = \frac{(1+0)+(1-0)t}{2} = 0.5+0.5t$$

$$d\,x = \frac{(1-0)}{2}d\,t = 0.5\,d\,t$$

$$\int_0^1 17^{2.5x}dx = \int_{-1}^1 17^{2.5(0.5+0.5)t}(0.5\,d\,t) = 0.5\int_{-1}^1 17^{(1.25+1.25t)}d\,t$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se recuerda que la formula general (5.35) tiene la forma

$$I \approx c_1\ f\,(t_1) + c_2\ f\,(t_2) + \cdots + c_n\ f\,(t_{n)}$$

Reemplazando los argumentos en la función de integración, tomando en cuenta los factores de peso correspondientes y utilizando la fórmula de los dos puntos, se tiene:

$$I \approx c_1\ f\,(t_1) + c_2\ f\,(t_2)$$

$$I \approx 0.5\left\{(1)\left[17^{(1.25+1.25(-0,577350\,)}\right] + (1)\left[17^{(1.25+1.25\,(0,577350\,)}\right]\right\} = 135.595324$$

Reemplazando los argumentos en la función de integración, tomando en cuenta los factores de peso correspondientes y utilizando la fórmula de los tres puntos, se tiene:

$$I \approx c_1\ f\,(t_1) + c_2\ f\,(t_2) + c_3\ f\,(t_3)$$

$$I \approx 0.5\left\{(0,555555)\left[17^{(1.25+1.25(-0,774597)}\right] + (0,888888)\left[17^{(1.25+1.25(0)} + \left(0,555555\right)\left[17^{(1.25+1.25(0,774597)}\right]\right]\right\}$$
$$I \approx 164,941678$$

Tabla 5.2. Resumen para dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos

t	**f (t)**	**C**	**Integral**
-0,57735	4,46746898	1	**135,595324**
0,57735	266,723178	1	
-0,774597	2,2216907	0,555555	**164,941678**
0	34,5192341	0,888888	
0,774597	536,33817	0,555555	
-0,861136	1,63523933	0,347855	**167,921665**
-0,339981	10,3549876	0,652145	
0,339981	115,07281	0,652145	
0,861136	728,68693	0,347855	
-0,906179	1,39412731	0,236927	**168,082667**
-0,538469	5,12699509	0,478628	
0	34,5192341	0,568889	
0,538469	232,412457	0,478628	
0,906179	854,712131	0,236927	
-0,932469	1,2701845	0,171324	**168,087899**
-0,661209	3,31956575	0,360761	
-0,238619	14,8269061	0,467913	
0,238619	80,3658913	0,467913	
0,661209	358,955844	0,360761	
0,932469	938,113738	0,171324	

ISBN: 978-631-6557-41-4

Ejemplo 2.

Integrar $\int_1^2 x\, e^{\log x} d\, x$

Solución

Se realiza el cambio de variables utilizando las fórmulas correspondientes

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)t}{2} = \frac{(2+1)+(2-1)t}{2} = 1.5 + 0.5t$$

$$d\,x = \frac{(2-1)}{2} d\,t = 0.5\,d\,t$$

$$\int_1^2 x\,e^{\log x} dx = \int_{-1}^{1} (1{,}5+0{,}5t)\,e^{\log(1{,}5+0{,}5t)} \left(0.5\,d\,t\right) = 0.5 \int_{-1}^{1} (1{,}5+0{,}5t)\,e^{\log(1.5+0.5t)} d\,t$$

Se recuerda que la formula general (5.35) tiene la forma

$$I \approx c_1\ f(t_1) + c_2\ f(t_2) + \cdots + c_n\ f(t_{n)}$$

Reemplazando los argumentos en la función de integración, tomando en cuenta los factores de peso correspondientes y utilizando la fórmula de los dos puntos, se tiene:

$$I \approx c_1\ f(t_1) + c_2\ f(t_2)$$

$$I \approx 0.5 \left\{ (1{,}5+0{,}5(-0{,}577350)) \left[e^{\log(1.5+0.5(-0{,}577350))} \right] + (1{,}5+0{,}5(0{,}577350)) \left[e^{\log(1.5+0.5(0{,}577350))} \right] \right\} = 1{,}809512$$

Reemplazando los argumentos en la función de integración, tomando en cuenta los factores de peso correspondientes y utilizando la fórmula de los tres puntos, se tiene:

$$I \approx c_1\ f(t_1) + c_2\ f(t_2) + c_3\ f(t_3)$$

$$I \approx 0.5 \left\{ (1{,}5+0{,}5(-0{,}774596)) \left[e^{\log(1.5+0.5(-0{,}774596))} \right] + (1{,}5+0{,}5(0)) \left[e^{\log(1.5+0.5(0))} \right] + (1{,}5+0{,}5(0{,}774596)) \left[e^{\log(1.5+0.5(0{,}774596))} \right] \right\}$$
$$I \approx 1{,}809557$$

Tabla 5.3 Resumen para dos, tres, cuatro, cinco y seis puntos

t	f (t)	C	Integral
-0,57735	1,316498397	1	**1,809512**
0,57735	2,302525489	1	
-0,774596	1,165523288	0,555555	**1,809557**
0	1,788820327	0,888888	
0,774596	2,486774915	0,555555	
-0,861136	1,101068246	0,347855	**1,809557**
-0,339981	1,505373181	0,652145	

0,339981	2,086591636	0,652145	
0,861136	2,568955416	0,347855	
-0,906179	1,067962899	0,236927	**1,809555**
-0,538469	1,34690807	0,478628	
0	1,788820327	0,568889	
0,538469	2,266716632	0,478628	
0,906179	2,612048091	0,236927	
-0,932469	1,048782529	0,171324	**1,809555**
-0,661209	1,251632084	0,360761	
-0,238619	1,588325113	0,467913	
0,238619	1,996368315	0,467913	
0,661209	2,380333885	0,360761	
0,932469	2,637299836	0,171324	

5.3.2 Cuadratura De Gauss-Laguerre

Esta cuadratura se aplica para la integración aproximada de integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} C_i \; f(x_i)$$

De igual forma la integral se transforma en una sumatoria del producto c_i f (x_i). Los factores de peso y argumentos de la función de Gauss-Laguerre se muestran en la tabla 4.4.

Tabla 5.4 Factores de peso y argumentos de Gauss-Laguerre

n	x_i	C_i
2	0,58578644	0,85355339
	3,41421356	0,14644661
4	0,32254769	0,60315410
	1,74576110	0,35741869
	4,53662030	0,03888791
	9,39507091	0,00053929
6	0,22284660	0,45896467
	1,18893210	0,41700083
	2,99273633	0,11337338
	5,77514357	0,01039920
	9,83746742	0,00026102
	15,98287398	0,00000090
8	0,17027963	0,36918859
	0,90370178	0,41878678
	2,25108663	0,17579499
	4,26670017	0,03334349
	7,04590540	0,00279454
	10,75851601	0,00009077
	15,74067864	0,00000085
	22,86313174	0,00000000

Fuente: Scheid Francis y Di Costanzo Rosa E. Métodos Numéricos. McGRAW-Hill. Segunda edición. México 1991. Pág. 232.

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\text{Ejemplo: Resolver } \int_0^{\infty} e^{-x} sen\ x\ d\ x$$

Para n = 2

$$I = 0{,}85355339\, sen\ (0{,}58578644 * 57{,}3) + 0{,}14644661 sen\ (3{,}41421356 * 57{,}3) = 0{,}43245917$$

Para n = 4

$$I = 0{,}60315410\ sen\ (0{,}32254769 * 57{,}3) + 0{,}35741869\ sen\ (1{,}74576110 * 57{,}3)$$
$$+ 0{,}03888791\ sen\ (4{,}53662030 * 57{,}3) + 0{,}00053929\ sen\ (9{,}39507091 * 57{,}3) = 0{,}50487808$$

Para n = 6

$$I = 0{,}45896467\ sen\ (0{,}22284660 * 57{,}3) + 0{,}41700083\ sen\ (1{,}18893210 * 57{,}3)$$
$$+ 0{,}11337338\ sen\ (2{,}99273633 * 57{,}3) + 0{,}01039920\ sen\ (5{,}77514357 * 57{,}3)$$
$$+ 0{,}00026102\ sen\ (9{,}83746742 * 57{,}5) + 0{,}00000090\ sen\ (15{,}98287398) = 0{,}50004835$$

5.3.3 Cuadratura De Gauss-Hermite

Esta cuadratura se aplica para la integración aproximada de integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\ d\ x = \sum_{i=1}^{n} C_i\ \ f(x_i)$$

De igual forma la integral se transforma en una sumatoria del producto c_i f (x_i). Los factores de peso y argumentos de la función de Gauss-Hermite, se muestran en la tabla 4.5

Tabla 5.5. Factores de peso y argumentos de Gauss-Hermite

n	x_i	C_i
2	±0,70710678	0,88622693
4	±0,52464762	0,80491409
	±1,65068012	0,08131284
6	±0,43607741	0,72462960
	±1,33584907	0,15706732
	±2,35060497	0,00453001
8	±0,38118699	0,66114701
	±1,15719371	0,20780233
	±1,98165676	0,01707798
	±2,93063742	0,00019960

Fuente: Fuente: Scheid Francis y Di Costanzo Rosa E. Métodos Numéricos. McGRAW-Hill. Segunda edición. México 1991. Pág. 235.

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\text{Ejemplo: Resolver } \int_0^{\infty} e^{-x^2} sen^2\ x\, d\,x$$

Para n = 2

$$I = 0{,}88622693\,(sen\ (0{,}70710678*57{,}3))^2 + 0{,}88622693\,(sen\ (-0{,}70710678*57{,}3))^2 + 0{,}748117$$

Para n = 4

$$I = 0{,}80491409\,(sen\ (0{,}52464762*57{,}3))^2 + 0{,}80491409\,(sen\ (-0{,}52464762*57{,}3))^2$$
$$+ 0{,}08131284\,(sen\ (1{,}65068012*57{,}3))^2 + 0{,}08131284\,(sen\ (-1{,}65068012*57{,}3))^2 = 0{,}5655097$$

Para n = 6

$$I = 0{,}66114701\,(sen\ (0{,}43607741*57{,}3))^2 + 0{,}66114701\,(sen\ (-0{,}43607741*57{,}3))^2$$
$$+ 0{,}20780233\,(sen\ (1{,}33584907*57{,}3))^2 + 0{,}20780233\,(sen\ (-1{,}33584907*57{,}3))^2$$
$$+ 0{,}01707798\,(sen\ (2{,}35060497*57{,}5))^2 + 0{,}01707798\,(sen\ (-2{,}35060497))^2 = 0{,}56025416$$

5.3.4 Cuadratura De Gauss-Chebyshev

Esta cuadratura se aplica para la integración aproximada de integrales de la forma

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$x_i = \cos\left[\frac{(2\,i-1)\,\pi}{2\,n}\right]$$

$$\text{Ejemplo: Resolver } \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = \frac{\pi}{2} = 1{,}570796$$

Para n = 2

$$x_1 = \left[\frac{(2*1-1)\,\pi}{2*2}\right] = 0{,}785398$$

$$x_2 = \left[\frac{(2*2-1)\,\pi}{2*2}\right] = -0{,}707106$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left((0{,}785398)^2 + (-0{,}707106)^2\right) = 1{,}57079549$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para n = 4

$$x_1 = \left[\frac{(2*1-1)\,\pi}{2*4}\right] = 0{,}923879$$

$$x_2 = \left[\frac{(2*2-1)\,\pi}{2*4}\right] = 0{,}382683$$

$$x_3 = \left[\frac{(2*3-1)\,\pi}{2*4}\right] = -0{,}382683$$

$$x_4 = \left[\frac{(2*4-1)\,\pi}{2*4}\right] = -0{,}923879$$

$$I = \frac{\pi}{4}\left((0{,}923879)^2 + (-0{,}382683)^2 + (-0{,}382683)^2 + (-0{,}923879)^2\right) = 1{,}57079564$$

5.4 INTEGRALES MULTIPLES

Los métodos numéricos estudiados pueden utilizarse no solo para resolver integrales simples sino también integrales múltiples.

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{1}^{4}\left(x^3 - 3y\,z\right)dx\,dy\,dz$$

Método analítico

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\left[\frac{x^4}{4} - 3\,xy\,z\right]_1^4 dy\,dz = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\left[63.75 - 9\,y\,z\right]dy\,dz$$

$$\int_{-1}^{2}\left[63.75\,y - 4.5\,y^2 z\right]_0^3 dz = \int_{-1}^{2}\left[191.25 - 40.5\,z\right]dz$$

$$\left[191.25\,z - 20.25\,z^2\right]_{-1}^{2} = \left[(382.5 - 81) - (-191.25 - 20.25)\right]$$

$$I = 513$$

Métodos Numéricos

Fórmulas de Newton Cotes cerradas

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}\int_{1}^{4}\left(x^3 - 3y\,z\right)dx\,dy\,dz$$

Dividiendo el intervalo de integración para z de a = -1 hasta b = 2 en tres segmentos se tiene

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+1}{3} = 1$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$f\,(x, y, z) = x^3 - 3\,y\,z$

Reemplazando en la función el valor de z empezando con z = -1 incrementando el valor del paso h = 1, hasta z =2

$f\,(x, y, -1) = x^3 - 3\,y$

$f\,(x, y, 0) = x^3$

$f\,(x, y, 1) = x^3 - 3\,y$

$f\,(x, y, 2) = x^3 - 6\,y$

$$I = \frac{h}{2}\left[f\,(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\,(x_i) + f\,(x_n) \right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x^3 + 3\,y + 2\left(x^3 + x^3 - 3\,y\right) + x^3 - 6\,y\right]$$

$$/ = 3\,x^3 - 4.5\,y$$

Dividiendo el intervalo de integración para y de a = 0 hasta b = 3 en tres segmentos se tiene

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3+0}{3} = 1$$

$f\,(x, y) = 3\,x^3 - 4.5\,y$

Reemplazando en la función el valor de y empezando con y = 0 incrementando el valor del paso h = 1, hasta y = 3

$f\,(x, 0) = 3\,x^3$

$f\,(x, 1) = 3\,x^3 - 4.5$

$f\,(x, 2) = 3\,x^3 - 9$

$f\,(x, 3) = 3\,x^3 - 13.5$

$$I = \frac{1}{2}\left[3x^3 + 2\left(3\,x^3 - 4.5 + 3\,x^3 - 9\right) + 3\,x^3 - 13.5\right]$$

$$I = 9\,x^3 - 20.25$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Dividiendo el intervalo de integración para x de a = 1 hasta b = 4 en tres segmentos se tiene

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1$$

$f(x) = 9x^3 - 20.25$

Reemplazando en la función el valor de x empezando con x = 1 incrementando el valor del paso h = 1, hasta x = 4

$f(1) = -11.25$

$f(2) = 51.75$

$f(3) = 222.75$

$f(4) = 555.75$

$$I = \frac{1}{2}\left[-11.25 + 2(51.75 + 222.75) + 555.75\right]$$

$$I = 546.75$$

5.5 DIFERENCIACION NUMERICA

Los problemas de derivadas pueden también ser resueltos mediante métodos numéricos, una de las alternativas más simples es mediante el uso de las fórmulas de diferencias finitas divididas dadas al inicio del capítulo 4.

Ejemplo:

Obtener la primera y segunda derivada de la función f (x) en el punto 2.

$$f(x) = 5x^4 + 9x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

Método analítico

$$f'(x) = 20x^3 + 27x^2 + 6x - 7$$

$$f'(2) = 273$$

$$f''(x) = 60x^2 + 54x + 6$$

$$f''(2) = 354$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Métodos numéricos

	f (-1) = 8	f (-0.5) = 5,4375
f (0) = 2	f (0,5) = 0,6875	
	f (1) = 12	f (1,5) = 53,9375
	f (2) = 152	f (2,5) = 339,1875
	f (3) = 656	f (3,5) = 1150,4375
	f (4) = 1878	f (4,5) = 2901,6875
	f (5) = 4292	

Primera derivada

a. Diferencias finitas hacia atrás

Para determinar la primera derivada en x = 2, utilizando las fórmulas de diferencias finitas hacia atrás se debe fijar un paso h y calcular la función en los puntos necesarios para aplicar las mencionadas formulas

Paso h =1

$$f'(2) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{152 - 12}{1} = 140$$

$$f'(2) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2\ h} = \frac{3(152) - 4(12) + 2}{2(1)} = 205$$

Paso h = 0.5

$$f'(2) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{152 - 53.9375}{0.5} = 196.125$$

$$f'(2) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2\ h} = \frac{3(152) - 4(53.9375) + 12}{2(0.5)} = 252.25$$

b. Diferencias finitas hacia delante

Paso h =1

$$f'(2) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{339.1875 - 152}{1} = 187.1875$$

$$f'(2) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2\ h} = \frac{-1878 + 4(656) - 3(152)}{2(1)} = 290$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Paso h = 0.5

$$f'(2)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}=\frac{339.1875-152}{0.5}=187.1875$$

$$f'(2)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2\,h}=\frac{-656+4(339.1875)-3(152)}{2(0.5)}=244.75$$

c. Diferencias finitas centrales

Paso h = 1

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{656-12}{2(1)}=322$$

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12\,h}=\frac{-1878+8(656)-8(12)+2}{12(1)}=273$$

Segunda derivada

a. Diferencias finitas hacia atrás

Paso h = 1

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}=\frac{152-2(12)+2}{(1)^2}=130$$

$$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2}=\frac{2(152)-5(12)+4(2)-8}{(1)^2}=244$$

Paso h = 0.5

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}=\frac{152-2(53.9375)+12}{(0,5)^2}=224.5$$

$$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2}=\frac{2(152)-5(53.9375)+4(12)-0.6875}{(0.5)^2}=326.5$$

b. Diferencias finitas hacia delante

Paso h = 1

$$f''(2)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}=\frac{1878-2(656)+152}{(1)^2}=712$$

$$f''(2)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}=\frac{-4292+4(1878)-5(656)+2(152)}{(1)^2}=244$$

Paso h = 0.5

$$f''(2)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}=\frac{656-2(339.1875)+152}{(0.5)^2}=518.5$$

$$f''(2)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(2)=\frac{-1150.4375+4(656)-5(339.1875)+2(152)}{(0.5)^2}=326.5$$

c. Diferencias finitas centrales

Paso h = 1

$$f''(2)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}=\frac{656-2(152)+12}{(1)^2}=364$$

$$f''(2)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2}$$

$$f''(2)=\frac{-1878+16(656)-30(152)+16(12)-2}{12(1)^2}=354$$

De los resultados se puede deducir que:

a. Al disminuir el paso la exactitud del cálculo de las derivadas aumenta.
b. Las diferencias finitas centrales proporcionan resultados más exactos que la otras.

5.6 DERIVADAS DE DATOS DESIGUALMENTE ESPACIADOS

Una forma para manejar datos desigualmente espaciados es mediante la ecuación que se obtiene al derivar el polinomio de Lagrange de segundo orden

$$f´(x)=\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f(x_{i-1})+\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f(x_i)+\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f(x_{i+1}) \tag{5.36}$$

Ejemplo:

Derivar en x = 4, si se dispone de la siguiente tabla de valores

Tabla 5.6

x	1	3	4	8	10
y	3	5	7	9	12

ISBN: 978-631-6557-41-4

Solución

Mediante el uso de la ecuación (5.36) se tiene

$$f'(4)=\frac{2(4)-4-8}{(3-4)(3-8)}(5)+\frac{2(4)-3-8}{(4-3)(4-8)}(7)+\frac{2(4)-3-4}{(8-3)(8-4)}(9)=1.7$$

5.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN A LA INGENIERIA

1. Se quiere determinar la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 5 Kg de aluminio desde 298 ^{o}C hasta 660 ^{o}C . La capacidad calorífica del aluminio en función de la temperatura se da en la tabla 5.4 y calor necesario ΔH se calcula por $\Delta H = mc\Delta T$

Tabla 5.7. Datos del problema

T (^{o} K)	298	425	552	679	806	933
C (J/kg-^{o}K)	896	890	883	821	750	660

Solución

Utilizando la regla del trapecio de segmentos múltiples se tiene

$$I \approx (b-a)\,\frac{f(x_o)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}$$

$$I \approx (933-298)\,\frac{896+2(890+883+821+750)+660}{2(5)} = 523494\ J/kg$$

$$\Delta H = (5\,Kg)(523494 J/kg) = 2617470 J = 626189.952 Cal.$$

2. El consumo de corriente eléctrica de una empresa en un período de 24 horas se muestra en la tabla 5.5. Cuál es el consumo de corriente diario de corriente

Tabla 5.8. Datos del problema

Tiempo (horas)	Consumo (KW/h)
12H00 Medianoche	251238
03H00	157521
06H00	358416
07H00	389568
08H00	485347
09H00	537482
11H00	375689
13H00	292473
15H00	186455
16H00	258794
17H00	321472
18H00	398791
19H00	423876
22H00	523598
24H00	268754

ISBN: 978-631-6557-41-4

Solución

Utilizando las fórmulas de Newton-Cotes cerradas se tiene

Para el intervalo de las 12H00-03H00, se usa la regla de Simpson de 1/3

$$I \approx (6-0)\frac{251238+4(157521)+358416}{6} = 1239738\,Kw$$

Para el intervalo de 06H00-09H00, se usa la regla de Simpson de 3/8

$$I \approx (9-6)\frac{358416+3(389568)+3(485347)+537482}{8} = 1320241.125\,Kw$$

Para el intervalo de 09H00-15H00, se vuelve a usar la regla de Simpson de 3/8

$$I \approx (15-9)\frac{537482+3(375689)+3(292473)+186455}{8} = 2046317.25\,Kw$$

Para el intervalo de 15H00-19H00, se usa la regla del Trapecio de segmentos múltiples

$$I \approx (19-15)\frac{186455+2(258794+321472+398791)+423876}{2(5)} = 1027378\,Kw$$

Finalmente, para el intervalo de 19H00-24H00, se usa la regla de Simpson de 1/3

$$I \approx (24-19)\frac{423876+4(523598)+268754}{6} = 2322518.333\,Kw$$

Sumando todos los resultados parciales se tiene que el consumo por día es de 7956192.708 KW

3. Para determinar la sección transversal de un canal de 7 m de ancho se determina su profundidad p cada metro de distancia y se obtiene

Tabla 5.9

d (m)	0	1	2	3	4	5	6	7
p (m)	0	0,42	0,55	1,21	1,20	0,65	0,45	0

Cuál es su sección transversal.

Solución

Utilizando la regla del trapecio de segmentos múltiples se tiene

$$I \approx (7-0)\frac{0+2(0,42+0,55+1,21+1,20+0,65+0,45)+0}{2(7)} = 2,24\,m^2$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

La sección transversal del canal es de 2,24 m^2

4. En un circuito con voltaje E, resistencia R e inductancia L, se cumple la ley de Kirchhoff $E = L\frac{di}{dt} + Ri$. Si se mide la corriente para varios valores de t se obtiene

Tabla 5.10

t (s)	1	2	3	4	5
i (Amperios)	3,5	3,8	4,2	4,9	6

Si la inductancia L es de 1.2 Henrios y la resistencia R de 0,5 ohmios, determinar el voltaje en el tiempo t igual a 3 segundos.

Solución

Se determina la derivada de la corriente i con respecto al tiempo en t = 3 s, para esto se aplica la formula larga de diferencias finitas centrales por ser la de mayor precisión

$$\frac{di}{dt} = \frac{-6 + 8(4{,}9) - 8(3{,}8) + 3{,}5}{12(1)} = 0{,}525 Amperios/s$$

Reemplazando el valor calculado en la ley de Kirchhoff se tiene

$$E = (1{,}2)(0{,}525) + (0{,}5)(3) = 2{,}13 voltios$$

5. Un flujo que se mueve a través de un tubo de 16 pulg. de diámetro tiene el siguiente perfil de velocidades

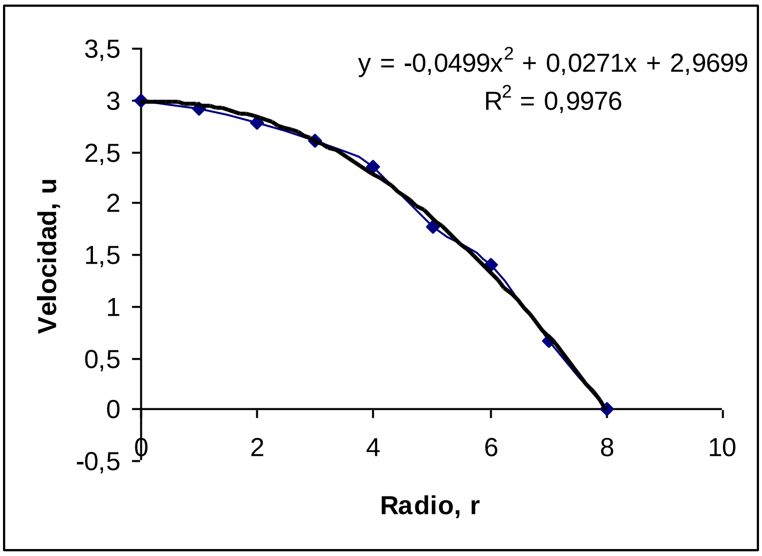
Tabla5.11

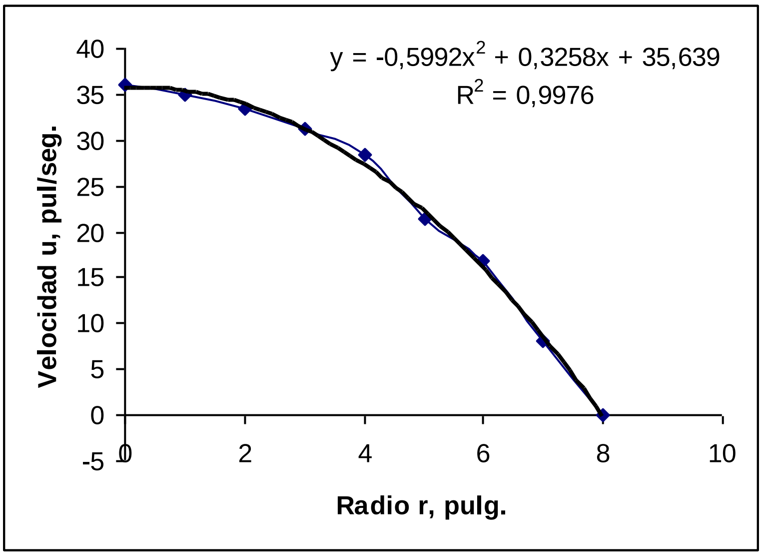
Radio r, pulg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Velocidad u, pies/s	3,00	2,92	2,78	2,61	2,36	1,78	1,40	0,67	0
r * u, $pies^2/s$	0	0,243	0,463	0,6525	0.7866	0,7416	0,70	0,3908	0

Encuentre el flujo volumétrico Q ($pies^3/s$), usando la relación $Q = \int_0^R 2\pi r u \, dr$ donde r es el radio axial del tubo, R es el radio del tubo y u es la velocidad. Resuelva el método con dos métodos diferentes:

a) Ajuste una curva polinomial a los datos e integre
b) Utilice la regla de Simpson 1/3 de segmentos múltiples para integrar.

Solución





$$\int_0^8 (-0{,}05992\,x^2 + 0{,}3258\,x + 35{,}639)\,d\,x$$

$$I = -0{,}05992\frac{x^3}{3} + 0{,}3258\frac{x^2}{2} + 35{,}639\,x\Big|_0^8 = 290{,}4244\,pu\lg^3/\,seg. = 2{,}0168\ \ pies^3/seg.$$

$$Q = 2\pi I = 2\pi(1{,}342\ pies^3/seg.) = 8{,}43\,pies^3/seg$$

b). Integrando los datos de la tercera fila de la tabla 5.11, mediante la regla de Simpson de 1/3, se tiene:

$$I = 2\pi\left[(8)\frac{0 + 4(0{,}243 + 0{,}6525 + 0{,}7416 + 0{,}3908) + 2(0{,}463 + 0{,}7866 + 0{,}70) + 0}{3(8)}\right]$$

$$I = 25{,}15536\,pu\lg.\,pies^2/seg = 2{,}0963\ \ pies^3/seg$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

CAPITULO 6.

6. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

6.1 INTRODUCCIÓN

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas. Por ejemplo.

$$\frac{dy}{dx} = x + 5 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$xy' + y = 3 \qquad \text{(c)}$$

$$y''' + 2\left(y''\right)^2 + y' = \cos x \qquad \text{(d)}$$

$$\left(y''\right)^2 + \left(y'\right)^3 + 7y = x^2 \qquad \text{(e)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{(f)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y \qquad \text{(g)}$$

- Si hay una sola variable independiente, como en los cuatro primeros ejemplos, las derivadas son derivadas ordinarias y la ecuación se denomina ecuación diferencial ordinaria.

- Si hay dos o más variables independientes, como en los dos últimos ejemplos, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación se llama ecuación entre derivadas parciales.

(Escalante, 2022)

6.1.1 Orden De Una Ecuación Diferencial. Es la categoría de la derivada mayor que interviene en una ecuación diferencial.

Ejemplo:

Las ecuaciones (a), (c) y (f) son de primer orden
Las ecuaciones (b), (e) y (g) son de segundo orden
La ecuación (d) es de tercer orden

6.1.2 Grado De Una Ecuación Diferencial. Es la potencia a la que esta elevada la derivada de mayor categoría de una ecuación diferencial.

Ejemplo:

Las ecuaciones (a), (b), (c), (d), (f) y (g) son de primer grado
La ecuación (e) es de segundo grado

ISBN: 978-631-6557-41-4

6.1.3 Solución De Una Ecuación Diferencial

Se llama solución de una ecuación diferencial a toda función derivable y = f (x) que satisface esta ecuación, o sea, a tal función que, al ser sustituida en la ecuación diferencial, convierte a esta en identidad.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad\qquad y = \int f(x)\,dx$$

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x)$$

$$f(x) = f(x)$$

6.1.4 Solución General. Es la que contiene una cantidad de constantes arbitrarias independientes igual a su orden. Geométricamente la solución general de la ecuación diferencial es una familia de curvas integrales de esta ecuación.

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad\qquad y = x^2 + c$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \qquad\qquad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

6.1.5 Solución Particular. Es toda solución que puede ser obtenida de la solución general, para ciertos valores numéricos de las constantes arbitrarias que forman parte de dicha solución. Las constantes arbitrarias que entran en la solución general se determinan a partir de las llamadas condiciones iniciales.

Ejemplo:

Si para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ planteamos como condición inicial $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$,

la solución particular será $y = x^2 + 1$

Se dice que una variable de una ecuación diferencial es independiente, si existen una o más derivadas con respecto a esa variable. Una variable es dependiente cuando existen derivadas de esa variable. En los ejemplos, x es la variable independiente y y la dependiente.

ISBN: 978-631-6557-41-4

6.2 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

6.2.1 Métodos Analíticos. Son aquellos que se aplica para la solución de muchos problemas sencillos. La solución viene en forma de una expresión analítica.

6.2.2 Métodos Numéricos. Son aquellos que se aplica para la solución de problemas complejos que son difíciles o imposibles de ser resueltos por los métodos analíticos. La solución aproximada viene en forma tabular

6.3 MÉTODOS DE UN PASO.

6.3.1 Método De Euler

Este método es comparativamente muy aproximado y se emplea, en lo fundamental, para los cálculos preliminares. Sin embargo, las ideas en que se basa el método de Euler son la partida para varios otros métodos. (Jiménez Serrano, 2021)

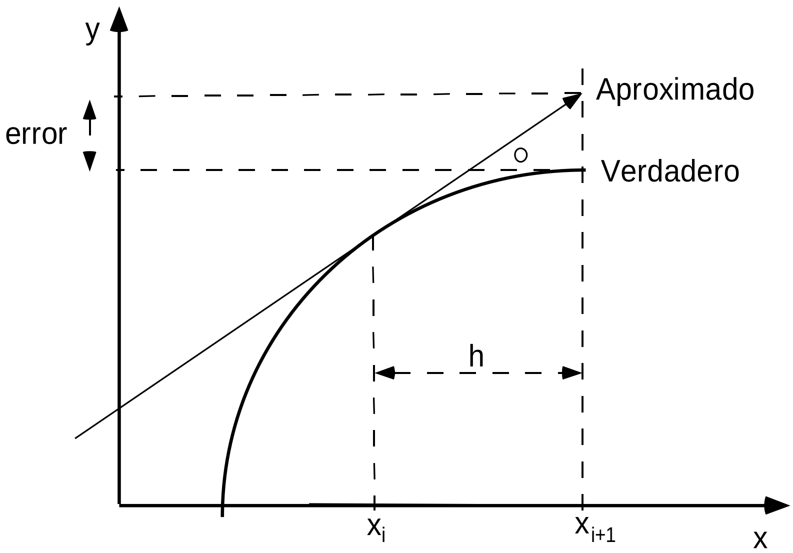


Figura 6.1. Esquema del método de Euler

Supongamos que se da la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(x_i, y_i\right) \tag{6.1}$$

La primera derivada proporciona una aproximación directa a la pendiente en x_i . Por lo tanto, la fórmula de Euler viene dada mediante la siguiente ecuación

$$y_{i+1} = y_i + h\ f\left(x_i, y_i\right) \tag{6.2}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

donde f (x_i, y_i) es la ecuación diferencial evaluada en x_i y y_i. Se predice un nuevo valor de y usando la pendiente (primera derivada) para extrapolar linealmente sobre el tamaño de paso h.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $y' = y - t^2 + 1$ dentro del intervalo $0 \leq t \leq 2$ con la condición inicial y (0) = 0,5, con un paso h = 0.2.

Solución

$$y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i, y_i)$$

Para i = 0

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 0{,}5 + (0{,}2)\left[0{,}5 - (0)^2 + 1\right] = 0{,}8$$

Para i = 1

$$y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1)$$

$$y_1 = 0{,}8 + (0{,}2)\left[0{,}8 - (0{,}2)^2 + 1\right] = 1{,}152$$

Para i = 2

$$y_3 = y_2 + h\,f(x_2, y_2)$$

$$y_1 = 1.152 + (0.2)\left[1.152 - (0.4)^2 + 1\right] = 1.5504$$

Para i = 3

$$y_4 = y_3 + h\,f(x_3, y_3)$$

$$y_4 = 1.5504 + (0.2)\left[1.5504 - (0.6)^2 + 1\right] = 1.98848$$

Para i = 4

$$y_5 = y_4 + h\,f(x_4, y_4)$$

$$y_5 = 1{,}98848 + (0{,}2)\left[1{,}98848 - (0{,}8)^2 + 1\right] = 2{,}458176$$

Con el algoritmo mostrado anteriormente se procede a realizar los cálculos para todos los valores dentro del intervalo de t:

ISBN: 978-631-6557-41-4

i	t	f(x,y)	y_{i+1} y EULER
0	0	1,5	0,8
1	0,2	1,76	1,152
2	0,4	1,992	1,5504
3	0,6	2,1904	1,98848
4	0,8	2,34848	2,458176
5	1	2,458176	2,9498112
6	1,2	2,5098112	3,45177344
7	1,4	2,49177344	3,950128128
8	1,6	2,390128128	4,428153754
9	1,8	2,188153754	4,865784504
10	2	1,865784504	5,238941405

Ejemplo adicional

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$ mediante el método de Euler, desde x = 0 hasta x = 4. La condición inicial en x = 0 es y = 1. Recuerde que la solución exacta está dada por la ecuación:$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$

Solución

Con el algoritmo planteado, se resuelve para varios valores del paso h, además para cada valor de x, también se evalúa el valor de la solución exacta o verdadera. Con esto se observa como al mejorar el valor del paso h, la aproximación de y de Euler mejora acercándose cada vez más al valor verdadero.

Paso h=0.5

x	f(xi,yi)	y EULER	y VERDADERO	et
0	8,5	1	1	0,000
0,5	1,25	5,25	3,21875	63,107
1	-1,5	5,875	3	95,833
1,5	-1,25	5,125	2,21875	130,986
2	0,5	4,5	2	125,000
2,5	2,25	4,75	2,71875	74,713
3	2,5	5,875	4	46,875
3,5	-0,25	7,125	4,71875	50,993
4	-7,5	7	3	133,333

Paso h=0.25

x	f(xi,yi)	y EULER	y VERDADERO	et
0	8,5	1	1	0,000
0,25	4,21875	3,125	2,560546875	22,044
0,5	1,25	4,1796875	3,21875	29,854

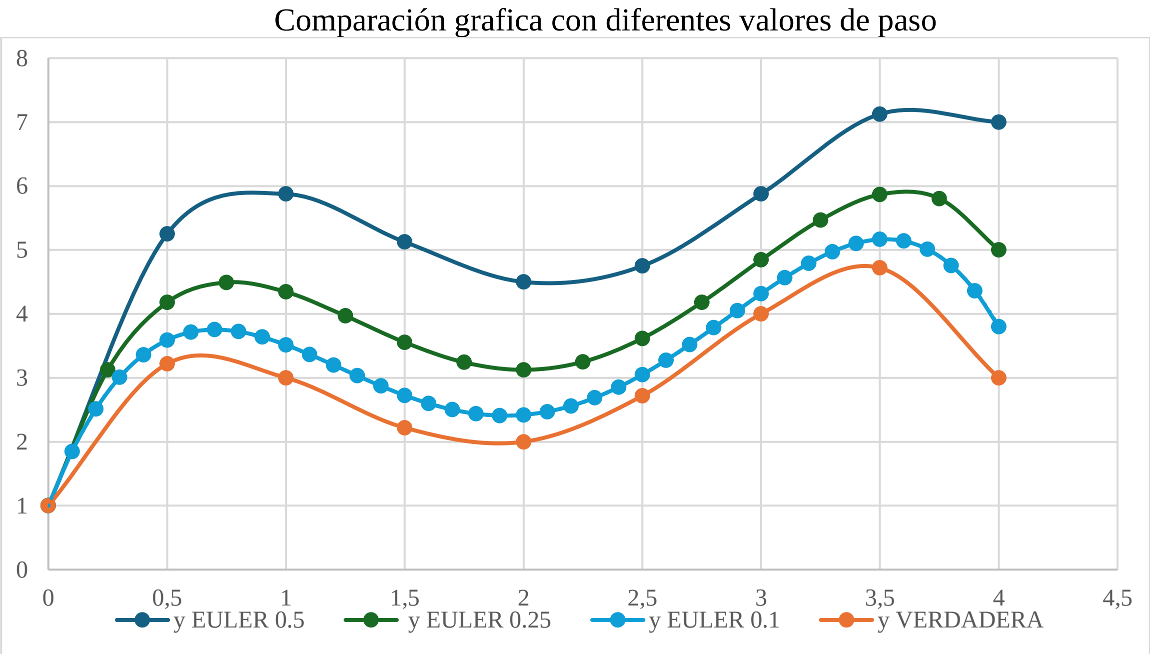
ISBN: 978-631-6557-41-4

0,75	-0,59375	4,4921875	3,279296875	36,986
1	-1,5	4,34375	3	44,792
1,25	-1,65625	3,96875	2,591796875	53,127
1,5	-1,25	3,5546875	2,21875	60,211
1,75	-0,46875	3,2421875	1,998046875	62,268
2	0,5	3,125	2	56,250
2,25	1,46875	3,25	2,248046875	44,570
2,5	2,25	3,6171875	2,71875	33,046
2,75	2,65625	4,1796875	3,341796875	25,073
3	2,5	4,84375	4	21,094
3,25	1,59375	5,46875	4,529296875	20,742
3,5	-0,25	5,8671875	4,71875	24,338
3,75	-3,21875	5,8046875	4,310546875	34,662
4	-7,5	5	3	66,667

Paso h=0,1

x	f(xi,yi)	y EULER	y VERDADERO	et
0	8,5	1	1	0,000
0,1	6,618	1,85	1,75395	5,476
0,2	4,964	2,5118	2,3312	7,747
0,3	3,526	3,0082	2,75395	9,232
0,4	2,292	3,3608	3,0432	10,436
0,5	1,25	3,59	3,21875	11,534
0,6	0,388	3,715	3,2992	12,603
0,7	-0,306	3,7538	3,30195	13,684
0,8	-0,844	3,7232	3,2432	14,800
0,9	-1,238	3,6388	3,13795	15,961
1	-1,5	3,515	3	17,167
1,1	-1,642	3,365	2,84195	18,405
1,2	-1,676	3,2008	2,6752	19,647
1,3	-1,614	3,0332	2,50995	20,847
1,4	-1,468	2,8718	2,3552	21,934
1,5	-1,25	2,725	2,21875	22,817
1,6	-0,972	2,6	2,1072	23,386
1,7	-0,646	2,5028	2,02595	23,537
1,8	-0,284	2,4382	1,9792	23,191
1,9	0,102	2,4098	1,96995	22,328
2	0,5	2,42	2	21,000
2,1	0,898	2,47	2,06995	19,327
2,2	1,284	2,5598	2,1792	17,465
2,3	1,646	2,6882	2,32595	15,574

2,4	1,972	2,8528	2,5072	13,784
2,5	2,25	3,05	2,71875	12,184
2,6	2,468	3,275	2,9552	10,822
2,7	2,614	3,5218	3,20995	9,715
2,8	2,676	3,7832	3,4752	8,863
2,9	2,642	4,0508	3,74195	8,254
3	2,5	4,315	4	7,875
3,1	2,238	4,565	4,23795	7,717
3,2	1,844	4,7888	4,4432	7,778
3,3	1,306	4,9732	4,60195	8,067
3,4	0,612	5,1038	4,6992	8,610
3,5	-0,25	5,165	4,71875	9,457
3,6	-1,292	5,14	4,6432	10,700
3,7	-2,526	5,0108	4,45395	12,502
3,8	-3,964	4,7582	4,1312	15,177
3,9	-5,618	4,3618	3,65395	19,372
4	-7,5	3,8	3	26,667



6,3.2 Análisis Del Error En El Método De Euler

Vale la pena recordar que las soluciones numéricas incluyen dos tipos principales de error:

1. Errores de truncamiento causados por la naturaleza de los métodos empleados en la aproximación a los valores de y.
2. Errores de redondeo causados por el número limitado de dígitos de cifras significativas que puede retener la computadora.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Los errores de truncamiento se componen de dos partes. La primera es un error de truncamiento local que resulta al aplicar el método en cuestión en un paso. El segundo es un error de programación que resulta de las aproximaciones producidas durante los pasos anteriores. La suma de los dos es el error de truncamiento local.

El conocimiento de la magnitud y propiedades del error de truncamiento se puede obtener derivando el método de Euler directamente de la expansión de la serie de Taylor. Con el fin de hacer uso recuérdese que la ecuación diferencial que se está integrando será de la forma general

$$y' = f(x, y)$$

donde $y' = dy/dx$ y x e y son las variables independiente y dependiente respectivamente. Si la solución, esto es, la función que describe el comportamiento de y tiene derivadas continuas, ésta se puede representar mediante una expansión de la serie de Taylor alrededor del punto inicial (x_i, y_i), como en

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2} h^2 + \ldots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R^n \qquad (6.3)$$

donde $h = x_{i+1} - x_i$ y R_n es el término residual definido como

$$R_n = \frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad (6.4)$$

donde está dentro del intervalo de x; a x_{i+1}. Se puede desarrollar una forma alternativa sustituyendo la ecuación (6.1) en las ecuaciones (6.3) y (6.5) de lo que se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + 0\left(h^{n+1}\right) \qquad (6.5)$$

en donde $0\left(h^{n+1}\right)$ especifica que el error de truncamiento local es proporcional al tamaño de paso elevado a la (n +1). ésima potencia.

Comparando las ecuaciones (6.2) y (6.5), puede verse que el método de Euler corresponde a la serie de Taylor truncada hasta el término f (x_i, y_i)h. Adicionalmente, la comparación indica que el error de truncamiento se debe a que se aproxima la solución verdadera usando una cantidad finita de términos de la serie de Taylor. Por lo tanto, se trunca o se deja fuera una parte de la solución verdadera y el error aproximado será igual a

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 \qquad (6.6)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

6.3.3 Método De Euler Modificado (O Método De Heun)

Una fuente fundamental de error en el método de Euler es que la derivada al principio del intervalo se supone que se aplica a través del intervalo entero.

Un método para mejorar la aproximación a la pendiente implica el cálculo de dos derivadas del intervalo, una en el punto inicial y la otra en el punto final. En seguida se promedian las dos derivadas y se obtiene una aproximación mejorada de la pendiente en el intervalo completo. Este esquema, llamado método de Heun, se muestra gráficamente en la figura 6.2.

Recuérdese que en el método de Euler, la pendiente al principio de un intervalo

$$y_i' = f\left(x_i, y_i\right) \qquad (6.7)$$

Se usa para extrapolar linealmente a y_{i+1}.

$$y_{i+1} = y_i + h\ f\left(x_i, y_i\right) \qquad (6.8)$$

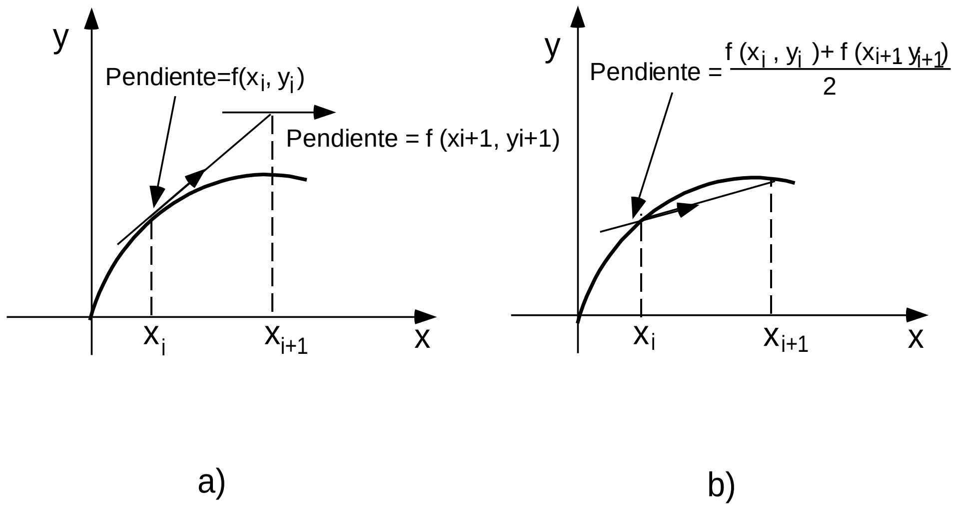


Figura 6.2. Esquema del método de Euler modificado

En el método estándar de Euler se pararía en este punto. Sin embargo, en el método de Heun (Euler modificado), la y_{i+1} calculada en la ecuación (6.8) no es la respuesta final sino una predicción intermedia. La ecuación se llama ecuación predictora. Proporciona una aproximación de y_{i+1} que permite el cálculo de una pendiente aproximada al final del intervalo:

$$y_{i+1}' = f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right) \qquad (6.9)$$

Por lo tanto, se puede combinar las dos pendientes [ecuaciones (6.7) y (6.9)] y obtener una pendiente promedio sobre el intervalo:

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\bar{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} h \quad (6.10)$$

Esta pendiente promedio se usa para extrapolar linealmente de y_i a y_{i+1} usando el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} h \qquad (6.11)$$

que se llama una ecuación correctora.

El método de Heun (Euler modificado) es un esquema predictor-corrector. Todos los métodos de pasos múltiples que se discutirán posteriormente son de este tipo. El único método corrector-predictor de un paso descrito en este documento es el método de Heun.

Como en los métodos iterativos similares analizados, un criterio de paro en la convergencia del corrector lo proporciona

$$|\in_a| = \left| \frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j} \right| 100\%$$

en donde y_{i+1}^{j-1} y y_{i+1}^j son el resultado de la iteración anterior y actual del corrector, respectivamente.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $y' = y - t^2 + 1$ dentro del intervalo $0 \le t \le 2$ con la condición inicial y (0) = 0.5, con un paso h = 0.2.

Solución

Se determina el valor predictor mediante la fórmula de Euler

$$y_{i+1} = y_i + h\ f(x_i, y_i)$$

Para i = 0

$$y_1 = y_0 + h\ f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 0{,}5 + (0{,}2)\left[0{,}5 - (0)^2 + 1\right] = 0{,}8$$

Se determina el valor corrector mediante la fórmula de Euler modificada

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} h$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y_1 = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} h$$

$$y_1 = 0{,}5 + \frac{\left[0{,}5 - (0)^2 + 1\right] + \left[0{,}8 - (0{,}2)^2 + 1\right]}{2}(0{,}2) = 0{,}826$$

Se repite el mismo proceso anterior para las siguientes iteraciones

Para i = 1

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1)$$

$$y_2 = 0{,}826 + (0{,}2)\left[0{,}826 - (0{,}2)^2 + 1\right] = 1{,}1832$$

$$y_2 = y_1 + \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2} h$$

$$y_2 = 0{,}826 + \frac{\left[0{,}826 - (0{,}2)^2 + 1\right] + \left[1{,}1832 - (0{,}4)^2 + 1\right]}{2}(0{,}2) = 1{,}20692$$

Para i = 2

$$y_3 = y_2 + h\, f(x_2, y_2)$$

$$y_3 = 1{,}20692 + (0{,}2)\left[1{,}20692 - (0{,}4)^2 + 1\right] = 1{,}616304$$

$$y_3 = y_2 + \frac{f(x_2, y_2) + f(x_3, y_3)}{2} h$$

$$y_2 = 1{,}20692 + \frac{\left[1{,}20692 - (0{,}4)^2 + 1\right] + \left[1{,}616304 - (0{,}6)^2 + 1\right]}{2}(0{,}2) = 1{,}637242$$

Para i = 3

$$y_4 = y_3 + h\, f(x_3, y_3)$$

$$y_4 = 1{,}637242 + (0{,}2)\left[1{,}637242 - (0{,}6)^2 + 1\right] = 2{,}092690$$

$$y_4 = y_3 + \frac{f(x_3, y_3) + f(x_4, y_4)}{2} h$$

$$y_4 = 1{,}637242 + \frac{\left[1{,}637242 - (0{,}6)^2 + 1\right] + \left[2{,}092690 - (0{,}8)^2 + 1\right]}{2}(0{,}2) = 2{,}110235$$

Para i = 4

$$y_5 = y_4 + h\, f(x_4, y_4)$$

$$y_5 = 2{,}110235 + (0{,}2)\left[2{,}110235 - (0{,}8)^2 + 1\right] = 2{,}604282$$

$$y_5 = y_4 + \frac{f(x_4, y_4) + f(x_5, y_5)}{2} h$$

$$y_2 = 2{,}110235 + \frac{\left[2{,}110235 - (0{,}8)^2 + 1\right] + \left[2{,}604282 - (1)^2 + 1\right]}{2}(0{,}2) = 2{,}617687$$

Con el algoritmo mostrado anteriormente se procede a realizar los cálculos para todos los valores dentro del intervalo de t:

t	f(x,y)	y	f(xi+1,yi+1)	Prom. pendiente	y HEUN
0	1,5				0,8
0,2	1,786	1,1832	1,76	1,63	0,826
0,4	2,04692	1,616304	2,0232	1,9046	1,20692
0,6	2,2772424	2,09269088	2,256304	2,151612	1,6372424
0,8	2,470235728	2,604282874	2,45269088	2,36496664	2,110235728
1	2,617687588	3,141225106	2,604282874	2,537259301	2,617687588
1,2	2,709578858	3,691494629	2,701225106	2,659456347	3,149578858
1,4	2,733686206	4,240423447	2,731494629	2,720536743	3,693686206
1,6	2,675097172	4,770116606	2,680423447	2,707054827	4,235097172
1,8	2,515618549	5,258742259	2,530116606	2,602606889	4,755618549
2	2,23305463	5,679665556	2,258742259	2,387180404	5,23305463

Ejemplo adicional

Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$ mediante el método de Heun, desde x = 0 hasta x = 4. La condición inicial en x = 0 es y = 1. Recuerde que la solución exacta está dada por la ecuación: $y = -0{,}5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8{,}5x + 1$

Solución

Con el algoritmo planteado, se resuelve para varios valores del paso h, además para cada valor de x, también se evalúa el valor de la solución exacta o verdadera. Con esto se observa como al mejorar el valor del paso h, la aproximación de y de Euler mejora acercándose cada vez más al valor verdadero.

Paso h=0,5

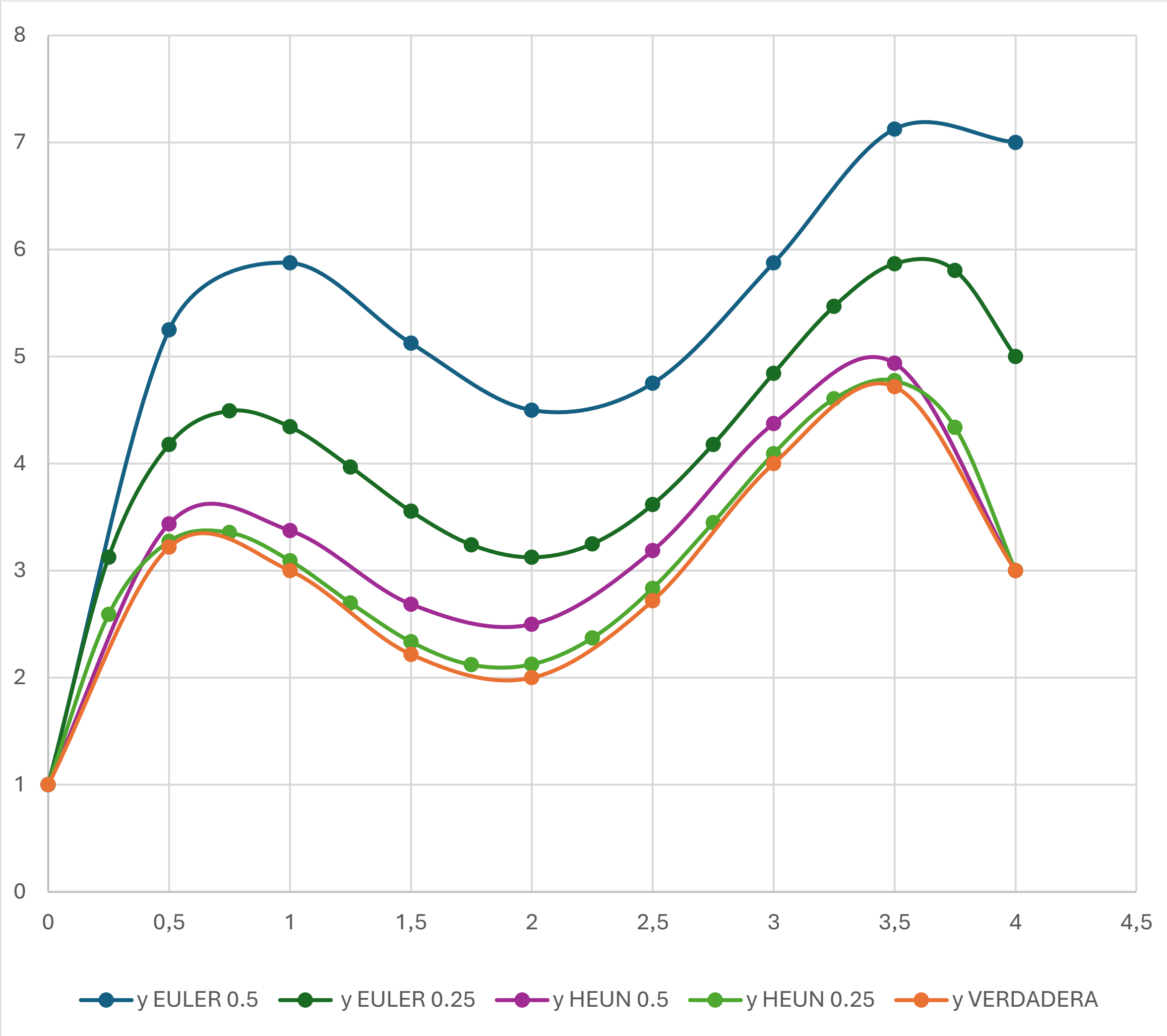
x	f(xi,yi)	y EULER	f(xi+1,yi+1)	Prom. pendiente	y HEUN	y VERDADERO	et Euler	et Heun
0	8,5	1		4,875	1	1	0,000	0
0,5	1,25	5,25	1,25	-0,125	3,4375	3,21875	63,107	6,7961165
1	-1,5	5,875	-1,5	-1,375	3,375	3	95,833	12,5
1,5	-1,25	5,125	-1,25	-0,375	2,6875	2,21875	130,986	21,126761
2	0,5	4,5	0,5	1,375	2,5	2	125,000	25
2,5	2,25	4,75	2,25	2,375	3,1875	2,71875	74,713	17,241379
3	2,5	5,875	2,5	1,125	4,375	4	46,875	9,375
3,5	-0,25	7,125	-0,25	-3,875	4,9375	4,71875	50,993	4,6357616
4	-7,5	7	-7,5		3	3	133,333	0

Paso h=0,25

x	f(xi,yi)	y EULER	f(xi+1,yi+1)	Prom pendiente	y HEUN	y VERDADERO	et	et Heun
0	8,5	1		6,359375	1	1	0,000	0
0,25	4,21875	3,125	4,21875	2,734375	2,58984375	2,560546875	22,044	1,14416
0,5	1,25	4,1796875	1,25	0,328125	3,2734375	3,21875	29,854	1,69903
0,75	-0,59375	4,4921875	-0,59375	-1,046875	3,35546875	3,279296875	36,986	2,32281
1	-1,5	4,34375	-1,5	-1,578125	3,09375	3	44,792	3,12500
1,25	-1,65625	3,96875	-1,65625	-1,453125	2,69921875	2,591796875	53,127	4,14469
1,5	-1,25	3,5546875	-1,25	-0,859375	2,3359375	2,21875	60,211	5,28169
1,75	-0,46875	3,2421875	-0,46875	0,015625	2,12109375	1,998046875	62,268	6,15836
2	0,5	3,125	0,5	0,984375	2,125	2	56,250	6,25000
2,25	1,46875	3,25	1,46875	1,859375	2,37109375	2,248046875	44,570	5,47350
2,5	2,25	3,6171875	2,25	2,453125	2,8359375	2,71875	33,046	4,31034
2,75	2,65625	4,1796875	2,65625	2,578125	3,44921875	3,341796875	25,073	3,21449
3	2,5	4,84375	2,5	2,046875	4,09375	4	21,094	2,34375
3,25	1,59375	5,46875	1,59375	0,671875	4,60546875	4,529296875	20,742	1,68176
3,5	-0,25	5,8671875	-0,25	-1,734375	4,7734375	4,71875	24,338	1,15894
3,75	-3,21875	5,8046875	-3,21875	-5,359375	4,33984375	4,310546875	34,662	0,67966
4	-7,5	5	-7,5	-3,75	3	3	66,667	0,00000

ISBN: 978-631-6557-41-4

Comparación grafica con diferentes valores de paso y respecto al método de Euler



6.3.4 Métodos Con Serie De Taylor De Orden Superior

Una manera de reducir el error en el método de Euler será incluir términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor alrededor de la solución. Por ejemplo, incluyendo el término de segundo orden de la ecuación

$$y_{i+1} = y_i + f\,(x_i, y_i)\,h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{6}h^{'3} + \frac{f'''(x_i, y_i)}{24}h^4 + \frac{f'(x_i, y_i)}{120}h^5 \ldots$$

se obtiene

$$y_{i+1} = y_i + f\,(x_i, y_i)\,h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 \qquad (6.12)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

con un error de truncamiento

$$E_a = \frac{f''(x_i, y_i)}{6} h^3 \qquad (6.13)$$

Esto es factible siempre y cuando la ecuación diferencial sea fácilmente derivable y así se puede continuar incluyendo términos de tercer, cuarto y quinto orden con el fin de aumentar la exactitud en la resolución de la ecuación diferencial.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $y' = y - t^2 + 1$ dentro del intervalo $0 \le t \le 2$ con la condición inicial y (0) = 0.5, con un paso h = 0.2.

$$f(x, y) = y - t^2 + 1$$

$$f'(x, y) = y' - 2t = y - t^2 - 2t + 1$$

$$f''(x, y) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

$$f'''(x, y) = y' - 2t - 2 = y - t^2 - 2t - 1$$

La fórmula de Taylor de orden 1, corresponde a la misma fórmula de Euler, en la que se toma en cuenta solamente el término de primer orden.

La fórmula de Taylor de orden 2

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2$$

Para i = 0

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h + \frac{f'(x_0, y_0)}{2} h^2$$

$$y_1 = 0{,}5 + \left[0{,}5 - (0)^2 + 1\right](0{,}2) + \left[0{,}5 - (0)^2 - 2(0) + 1\right]\frac{(0{,}2)^2}{2} = 0{,}83$$

Para i =1

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h + \frac{f'(x_1, y_1)}{2} h^2$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y_1 = 0{,}83 + \left[0{,}83 - (0{,}2)^2 + 1\right](0{,}2) + \left[0{,}83 - (0{,}2)^2 - 2(0{,}2) + 1\right]\frac{(0{,}2)^2}{2} = 1{,}215800$$

Para i = 2

$$y_3 = y_2 + f\,(x_2, y_2)\,h + \frac{f'(x_2, y_2)}{2}h^2$$

$$y_1 = 1{,}215800 + \left[1{,}215800 - (0{,}4)^2 + 1\right](0{,}2) + \left[1{,}215800 - (0{,}4)^2 - 2(0{,}4) + 1\right]\frac{(0{,}2)^2}{2} = 1{,}652076$$

Para i = 3

$$y_4 = y_3 + f\,(x_3, y_3)\,h + \frac{f'(x_3, y_3)}{2}h^2$$

$$y_1 = 1{,}652076 + \left[1{,}652076 - (0{,}6)^2 + 1\right](0{,}2) + \left[1{,}652076 - (0{,}6)^2 - 2(0{,}6) + 1\right]\frac{(0{,}2)^2}{2} = 2{,}132333$$

Para i = 4

$$y_5 = y_4 + f\,(x_4, y_4)\,h + \frac{f'(x_4, y_4)}{2}h^2$$

$$y_1 = 2{,}132333 + \left[2{,}132333 - (0{,}8)^2 + 1\right](0{,}2) + \left[2{,}132333 - (0{,}8)^2 - 2(0{,}8) + 1\right]\frac{(0{,}2)^2}{2} = 2{,}648646$$

La fórmula de Taylor de orden 3

$$y_{i+1} = y_i + f\,(x_i, y_i)\,h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{6}h'^3 \qquad (6.14)$$

La fórmula de Taylor de orden 4

$$y_{i+1} = y_i + f\,(x_i, y_i)\,h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2}h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{6}h'^3 + \frac{f'''(x_i, y_i)}{24}h^4 \qquad (6.15)$$

y así sucesivamente.

6.3.5 Métodos De Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta tiene la exactitud del esquema de la serie de Taylor sin necesidad del cálculo de derivadas superiores. Existen muchas variaciones, pero todas ellas se pueden ajustar a la forma general de la ecuación

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \qquad (6.16)$$

donde $\phi(x_i, y_i, h)$ se le llama función de incremento y puede interpretarse como el promedio de la pendiente sobre el intervalo. La función de incremento se puede escribir en la forma general como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n \qquad (6.17)$$

en donde las a son constantes y las k son

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (6.18)$$

$$k_2 = f(x_i + p_i h, y_i + q_{11} k_1 h) \qquad (6.19)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \qquad (6.20)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \qquad (6.21)$$

Se puede observar que las k son relaciones recurrentes. Esto es, k_1 aparece en la ecuación k_2, que aparece en la ecuación k_3, etc. Esta recurrencia hace a los métodos de Runge Kutta eficientes para su cálculo en computadora.

Se pueden desarrollar varios métodos de Runge-Kutta empleando una cantidad diferente de términos en la función de incremento especificados por n. Nótese que el método de Runge-Kutta de primer orden con n = 1 es, de hecho, el método de Euler. Una vez que se ha escogido n, los valores de las a, de las p y de las q se evalúan igualando la ecuación (6.16) a los términos en una expansión de la serie de Taylor. Por lo tanto, al menos para versiones menores de la orden, en general, el número de términos n representa el orden del método.

6.3.5.1 Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

La versión de segundo orden de la ecuación (6.16) es

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \qquad (6.22)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (6.23)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h,\ y_i + q_{11} k_1 h) \qquad (6.24)$$

Para usar esta ecuación se tienen que determinar los valores de a_1, a_2, p_1 y q_{11}.

ISBN: 978-631-6557-41-4

6.3.5. 2 Métodos de Runge-Kutta de tercer orden

Se puede llevar a cabo una derivación análoga a la del método de segundo orden, para n = 3. El resultado de esta derivación es de seis ecuaciones con ocho incógnitas. Por lo tanto, se deben especificar a priori los valores de dos de las incógnitas para determinar los parámetros restantes. Una versión común que resulta es

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\right]h \qquad (6.25)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (6.26)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \qquad (6.27)$$

$$k_3 = f(x_i + h,\ y_i - k_1 h + 2k_2 h) \qquad (6.28)$$

Se puede observar que si la derivada es una función sólo de x, este método de tercer orden se reduce a la regla de Simpson de 1/3. (Arévalo Ovalle et al., 2021)

6.3.5.3 Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right]h \qquad (6.29)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad (6.30)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \qquad (6.31)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \qquad (6.32)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3) \qquad (6.33)$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $y' = y - t^2 + 1$ dentro del intervalo $0 \leq t \leq 2$ con la condición inicial y (0) = 0,5, con un paso h = 0,2.

Solución

Se procede a calcular las constantes k para la primera iteración

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$k_1 = 0{,}5 - (0)^2 + 1 = 1{,}5$$

$$k_2 = \left[0{,}5 + \frac{1}{2}(0{,}2)(1{,}5)\right] - \left[0 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 1{,}64$$

$$k_3 = \left[0{,}5 + \frac{1}{2}(0{,}2)(1{,}64)\right] - \left[0 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 1{,}654$$

$$k_4 = [0{,}5 + (0{,}2)(1{,}5)] - [0 + 0{,}2]^2 + 1 = 1{,}7908$$

Para i = 0

$$y_1 = 0{,}5 + \left[\frac{1}{6}(1{,}5 + 2(1{,}64) + 2(1{,}654) + 1{,}7908)\right](0{,}2) = 0{,}829293$$

Segunda iteración

$$k_1 = 0{,}829293 - (0{,}2)^2 + 1 = 1{,}789293$$

$$k_2 = \left[0{,}829293 + \frac{1}{2}(0{,}2)(1{,}789293)\right] - \left[0{,}2 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 1{,}918222$$

$$k_3 = \left[0{,}829293 + \frac{1}{2}(0{,}2)(1{,}918222)\right] - \left[0{,}2 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 1{,}931115$$

$$k_4 = [0{,}829293 + (0{,}2)(1{,}931115)] - [0{,}2 + 0{,}2]^2 + 1 = 2{,}055516$$

Para i = 1

$$y_2 = 0.829293 + \left[\frac{1}{6}(1.789293 + 2(1.918222) + 2(1.931115) + 2.055516)\right](0.2) = 1.214076$$

Tercera iteración

$$k_1 = 1{,}214076 - (0{,}4)^2 + 1 = 2{,}054076$$

$$k_2 = \left[1{,}214076 + \frac{1}{2}(0{,}2)(2{,}054076)\right] - \left[0{,}4 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 2{,}169484$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$k_3 = \left[1{,}214076 + \frac{1}{2}(0{,}2)(2{,}169484)\right] - \left[0{,}4 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 2{,}181024$$

$$k_4 = [1{,}214076 + (0{,}2)(2{,}181024)] - [0{,}4 + 0{,}2]^2 + 1 = 2{,}290281$$

Para i = 2

$$y_3 = 1{,}214076 + \left[\frac{1}{6}(2{,}054076 + 2(2{,}169484) + 2(2{,}181024) + 2{,}290281)\right](0{,}2) = 1{,}648922$$

Cuarta iteración

$$k_1 = 1{,}648922 - (0{,}6)^2 + 1 = 2{,}288922$$

$$k_2 = \left[1{,}648922 + \frac{1}{2}(0{,}2)(2{,}288922)\right] - \left[0{,}6 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 2{,}387814$$

$$k_3 = \left[1{,}648922 + \frac{1}{2}(0{,}2)(2{,}387814)\right] - \left[0{,}6 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 2{,}397703$$

$$k_4 = [1{,}648922 + (0{,}2)(2{,}397703)] - [0{,}6 + 0{,}2]^2 + 1 = 2{,}488463$$

Para i = 3

$$y_4 = 1{,}648922 + \left[\frac{1}{6}(2{,}288922 + 2(2{,}387814) + 2(2{,}397703) + 2{,}488463)\right](0{,}2) = 2{,}127202$$

Quinta iteración

$$k_1 = 2{,}127202 - (0{,}8)^2 + 1 = 2{,}487202$$

$$k_2 = \left[2{,}127202 + \frac{1}{2}(0{,}2)(2{,}487202)\right] - \left[0{,}8 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 2{,}565923$$

$$k_3 = \left[2{,}127202 + \frac{1}{2}(0{,}2)(2{,}565923)\right] - \left[0{,}8 + \frac{1}{2}(0{,}2)\right]^2 + 1 = 2{,}573795$$

$$k_4 = [2{,}127202 + (0{,}2)(2{,}573795)] - [0{,}8 + 0{,}2]^2 + 1 = 2{,}641962$$

Para i = 4

$$y_2 = 2{,}127202 + \left[\frac{1}{6}\left(2{,}487202 + 2\left(2{,}565923\right) + 2\left(2{,}573795\right) + 2{,}641962\right)\right]\left(0{,}2\right) = 2{,}640822$$

6.4 MÉTODOS DE PASOS MÚLTIPLES

Se basan en el conocimiento de que una vez que los cálculos han empezado, la información evaluada en puntos previos sirve de guía. La curvatura de las líneas que conectan estos puntos anteriores proporciona información referente a la trayectoria de la solución. Se debe recordar que el método de Heun usa el método de Euler como un predictor

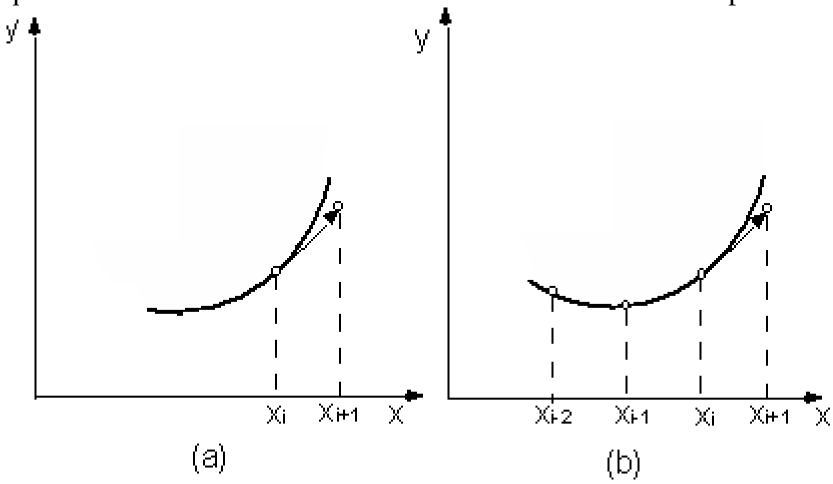


Figura 6.3 . (a) Representación del método de un paso y (b) Representación del método de pasos múltiples en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

6.4.1 Método De Adams

El método de Adams se basa en la aplicación de una formula predictora y en la posterior aplicación de una formula correctora.

a. Formula predictora de Adams-Bashfort.

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\ f_{i-k} + 0\left(h^{n+1}\right) \qquad (6.34)$$

Los coeficientes β_k se muestran en la tabla 6.1

Tabla 6.1 COEFICIENTES EN LOS PREDICTORES DE ADAMS-BASHFORTH

ORDEN	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$				

ISBN: 978-631-6557-41-4

3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$			
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$		
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$	
6	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{7923}{1440}$	$\frac{9982}{1440}$	$-\frac{7298}{1440}$	$\frac{2877}{1440}$	$-\frac{475}{1440}$

b. Formula correctora de Adams-Moulton.

Los coeficientes β_k se muestran en la tabla 6.2

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\ f_{i+1-k} + 0\left(h^{n+1}\right) \qquad (6.35)$$

Tabla 6.2. COEFICIENTES EN LOS CORRECTORES DE ADAMS-MOULTON

ORDEN	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$			
4	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$		
5	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$	
6	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$

6.4.2 Método De Milne

El método de Milne es el método de pasos múltiples basado en las fórmulas de integración de Newton-Cotes. Este usa la fórmula abierta de Newton-Cotes de tres puntos como predictor:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right) \qquad (6.36)$$

y la formula cerrada de Newton-Cotes de tres puntos(regla de Simpson de 1/3) como corrector

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i-1} + 4\, f_{i-1} + f_{i+1}\right) \qquad (6.37)$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial $y' = y - t^2 + 1$ dentro del intervalo $0 \le t \le 2$ con la condición inicial y (0) = 0.5, con un paso h = 0.2.

Solución

Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, en la página 172 y 173, se obtuvieron los siguientes resultados

Tabla 6.3. Resultados obtenidos según el método de Runge-Kutta

Subíndice	0	1	2	3	4
y	0,5	0,829293	1,214076	1,648922	2,127203
$k_1 = y'$	1,5	1,789293	2,054076	2,288922	2,487203

Si se utiliza las fórmulas de Adams de cuarto orden se tiene, para plantear la formula predictora se toman los coeficientes de la tabla 6.1 y se tiene

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55\, y'_i - 59\, y'_{i-1} + 37\, y'_{i-2} - 9\, y'_{i-3}\right)$$

De la misma manera se toman los coeficientes de la tabla 6.2 y se tiene la formula correctora

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9\, y'_{i+1} + 19\, y'_i - 5\, y'_{i-1} + y'_{i-2}\right)$$

Los valores de la tabla 6.3 se reemplazan en la formula predictora

Para i = 4 se tiene

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}\left(55\, y'_4 - 59\, y'_3 + 37\, y'_2 - 9\, y'_1\right)$$

$$y_5 = 2{,}127202 + \frac{0{,}2}{24}\left[55\,(2{,}487203) - 59\,(2{,}288922) + 37\,(2{,}054076) - 9\,(1{,}789293)\right] = 2{,}640928$$

Este valor predictor se aplica en la ecuación diferencial en t = 1 s

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$k_1 = y_5' = 2,640928 - (1)^2 + 1 = 2,640928$$

Este valor de y_5' se aplica en la ecuación correctora para obtener el valor de y_5 esperado

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}\left(9\,y_5' + 19\,y_4' - 5\,y_3' + y_2'\right)$$

$$y_5 = 2,127202 + \frac{0,2}{24}\left[\,9\,(2,640928) + 19\,(2,487203) - 5\,(2,288922) + 2.054076\,\right] = 2,640825$$

La solución real de la ecuación diferencial tratada es

$$y(t) = (t+1)^2 - 0,5\,e^t$$

Para t = 1, y (1) = 2,640859

Por lo tanto, el error relativo utilizando Runge-Kutta es

$$\delta = \frac{2,640859 - 2,640822}{2,640859} * 100 = 0,0014$$

Utilizando el método de Adams

$$\delta = \frac{2,640859 - 2,640825}{2,640859} * 100 = 0,0013$$

Para resolver el mismo ejemplo ahora mediante el Método de Milne, se toman de igual forma los valores necesarios de la tabla 6.3 y se reemplazan en la ecuación predictora

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4\,h}{3}\left(2\,y_i' - y_{i-1}' + 2\,y_{i-2}'\right)$$

$$y_5 = y_1 + \frac{4\,h}{3}\left(2\,y_4' - y_3' + 2\,y_2'\right)$$

$$y_5 = 0,829293 + \frac{4(0,2)}{3}\left[2\left(2.487203\right) - 2.288922 + 2\left(2,054076\right)\right] = 2,640929$$

Este valor predictor se aplica en la ecuación diferencial en t = 1 s

$$k_1 = y_5' = 2,640929 - (1)^2 + 1 = 2,640929$$

De igual forma reemplazando en la ecuación correctora se tiene

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(y'_{i-1} + 4y'_i + y'_{i+1}\right)$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3}\left(y'_3 + 4y'_4 + y'_5\right)$$

$$y_5 = 1{,}648922 + \frac{0{,}2}{3}\left[2.288922 + 4\left(2{,}487203\right) + 2{,}640929\right] = 2{,}640833$$

$$\delta = \frac{2{,}640859 - 2{,}640833}{2{,}640859} * 100 = 0{,}00098$$

Por lo que se puede deducir que, para este ejemplo, el Método de Milne es más exacto que el Método de Adams y que el de Runge-Kutta.

6.5 ECUACIONES DIFERENCIALES CON VALOR EN LA FRONTERA

Hasta el momento todos los problemas planteados y resueltos son de valor inicial, es decir todas las condiciones impuestas se refieren a un punto inicial. Pero en la práctica los problemas físicos dependen más de la posición que del tiempo, por lo que se vuelve necesario conocer el procedimiento para resolver los problemas con valores en la frontera.

Este tipo de problemas se pueden resolver mediante dos métodos:

6.5.1 Método Del Disparo

Este método consiste en convertir un problema con valores en la frontera en dos o más problemas de valor inicial. Cada problema de valor inicial se asemeja a un disparo que se realiza hacia un cierto objetivo. Luego por interpolación a partir de los datos obtenidos de cada problema de valor inicial se obtiene el valor de “z’’ apropiado, en otras palabras el ángulo de disparo que permite dar en el blanco.

Ejemplo:

$$y'' = 2y' - y + xe^x - x$$

$0 \le x \le 2,$ $\quad y(0) = 0$ $\quad y(2) = 0$ $\quad$ h = 0,4

Solución

Como la ecuación diferencial es de segundo orden le dividimos en un sistema de dos ecuaciones de primer orden por el siguiente artificio

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\frac{d\,y}{d\,x} = z$$

$$\frac{d\,z}{d\,x} = 2\,z - y + x\,e^{x} - x$$

Se plantea como z (0) = 1 y si se utiliza el método de Runge-Kutta de orden cuatro se determina un juego de constantes k para la primera ecuación y un juego de constantes l para la segunda, las mismas que se calculan alternadamente de la siguiente manera

$$k_1 = z = 1$$

$$l_1 = 2\,(1) - (0) + (0)\,e^{(0)} - (0) = 2$$

$$k_2 = \left[1 + 0{,}5\left(0{,}4\right)(\,2)\right] = 1{,}4$$

$$l_2 = 2\left[1 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\left(2\right)\right] - \left[0 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\left(1\right)\right] + \left[0 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\right]e^{\left[0+0{,}5\left(0{,}4\right)\right]} - \left[0 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\right] = 2{,}644281$$

$$k_3 = \left[1 + 0{,}5\left(0{,}2\right)(\,2{,}644281)\right] = 1{,}528856$$

$$l_3 = 2\left[1 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\left(2{,}644281\right)\right] - \left[0 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\left(1{,}4\right)\right] + \left[0 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\right]e^{\left[0+0{,}5\left(0{,}4\right)\right]} - \left[0 + 0{,}5\left(0{,}4\right)\right] = 2{,}821993$$

$$k_4 = \left[1 + \left(0{,}4\right)(\,2{,}352621)\right] = 2{,}128797$$

$$l_4 = 2\left[1 + \left(0{,}4\right)\left(2{,}352621\right)\right] - \left[0 + \left(0{,}4\right)\left(1{,}231052\right)\right] + \left[0 + \left(0{,}4\right)\right]e^{\left[0+\left(0{,}4\right)\right]} - \left[0 + \left(0{,}4\right)\right] = 3{,}842782$$

Se determina el nuevo valor de **y** en función de las constantes k

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{6}\left[k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right]h$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}\left[1 + 2\left(1{,}4\right) + 2\left(1{,}528856\right) + 2{,}128797\right]\left(0{,}4\right) = 0{,}5999006$$

Se determina el nuevo valor de **z** en función de las constantes l

$$z_{i+1} = z_i = \frac{1}{6}\left[l_1 + 2\,l_2 + 2\,l_3 + l_4\right]h$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{6}\left[2 + 2\left(2{,}644281\right) + 2\left(2{,}821993\right) + 3{,}842782\right]\left(0{,}4\right) = 2{,}118355$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se continua de la misma forma para las siguientes iteraciones, cuyos resultados se muestran en la tabla 6.4, y en la quinta iteración se obtiene que y (2) = 20,596521 y como el valor de y (5) no es igual a cero, se plantea un nuevo valor de z (0) = 2, con el que se deberá trabajar nuevamente.

Tabla 6.4. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

x	y	z	h	yi+1	zi+1
0	0	1	0,4	0,5991006	2,1183552
0,4	0,5991006	2,1183552	0,4	1,8391227	4,3509057
0,8	1,8391227	4,3509057	0,4	4,3908834	8,9801994
1,2	4,3908834	8,9801994	0,4	9,6730797	18,609985
1,6	9,6730797	18,609985	0,4	20,596521	38,367748

K1	L1	K2	L2	K3	L3	K4	L4
1	2	1,4	2,6442806	1,5288561	2,8219928	2,1287971	3,8427817
2,1183552	3,8343397	2,8852232	5,2409459	3,1665444	5,6502148	4,3784412	7,8715967
4,3509057	7,8431215	5,9195301	10,848038	6,5205134	11,73628	9,0454177	16,427648
8,9801994	16,353656	12,250931	22,592218	13,498643	24,433496	18,753598	34,041707
18,609985	33,871743	25,384334	46,462957	27,902577	50,144573	38,667815	69,279631

$$k_1 = z = 2$$

$$l_1 = 2(2) - (0) + (0)e^{(0)} - (0) = 4$$

$$k_2 = [2 + 0{,}5(0{,}4)(4)] = 2{,}8$$

$$l_2 = 2[2 + 0{,}5(0{,}4)(4)] - [0 + 0{,}5(0{,}4)(2)] + [0 + 0{,}5(0{,}4)]e^{[0+0{,}5(0{,}4)]} - [0 + 0{,}5(0{,}4)] = 5{,}2442806$$

$$k_3 = [2 + 0{,}5(0{,}4)(5{,}244281)] = 3{,}0488561$$

$$l_3 = 2[2 + 0{,}5(0{,}4)(5{,}244281)] - [0 + 0{,}5(0{,}4)(2{,}8)] + [0 + 0{,}5(0{,}4)]e^{[0+0{,}5(0{,}4)]} - [0 + 0{,}5(0{,}4)] = 5{,}5819928$$

$$k_4 = [2 + (0{,}4)(5{,}581993)] = 4{,}232797$$

$$l_4 = 2[2 + (0{,}4)(4{,}692621)] - [0 + (0{,}4)(2{,}461052)] + [0 + (0{,}4)]e^{[0+(0{,}4)]} - [0 + (0{,}4)] = 7{,}4427817$$

Se determina el nuevo valor de “**y**” en función de las constantes k

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]h$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}[2 + 2(2{,}8) + 2(3{,}0488561) + 4{,}232797](0{,}4) = 1{,}1953673$$

Se determina el nuevo valor de **z** en función de las constantes l

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$z_{i+1} = z_i = \frac{1}{6}\left[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right]h$$

$$z_1 = 2 + \frac{1}{6}\left[4 + 2(5{,}244281) + 2(5{,}581993) + 7{,}442782\right](0{,}4) = 4{,}206355$$

Tabla 6.5. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

x	y	z	h	yi+1	zi+1
0	0	2	0,4	1,1953673	4,2063552
0,4	1,1953673	4,2063552	0,4	3,6180644	8,3551158
0,8	3,6180644	8,3551158	0,4	8,3714434	16,280266
1,2	8,3714434	16,280266	0,4	17,590325	31,47905
1,6	17,590325	31,47905	0,4	35,359545	60,517565

K1	L1	K2	L2	K3	L3	K4	L4
2	4	2,8	5,2442806	3,0488561	5,5819928	4,2327971	7,4427817
4,2063552	7,414073	5,6891698	9,8349726	6,1733497	10,50677	8,409063	14,133852
8,3551158	14,0726	11,169636	18,768466	12,108809	20,083908	16,388679	27,09991
16,280266	26,97323	21,674912	35,999608	23,480188	38,53123	31,692758	51,94685
31,47905	51,692627	41,817575	68,838381	45,246726	73,628978	60,930641	98,950379

Se continua de la misma forma para las siguientes iteraciones, cuyos resultados se muestran en la tabla 6.5, y en la quinta iteración se obtiene que y (2) = 35,359545. Ahora, debido a que la ecuación diferencial es lineal, los valores de

z (0) = 1 → y (10) = 20,596521 y

z (0) = 2 → y (10) = 35,359545

están relacionados linealmente. Estos se pueden usar para calcular el valor de z (0) que dé y (2) = 0. Se puede emplear la fórmula de interpolación lineal de Newton, de la siguiente manera

$$z\,(0) = 1 + \frac{2-1}{35{,}359545 - 20{,}596521}\left[0 - 20{,}596521\right] = -0{,}395142$$

Este valor se debe usar para determinar la solución correcta siguiendo el mismo método de cálculo, esto es

$$k_1 = z = -0{,}395142$$

$$l_1 = 2(-0{,}39592) - (0) + (0)e^{(0)} - (0) = -0{,}790284$$

$$k_2 = [-0{,}395142 + 0{,}5(0{,}4)(-0{,}790284)] = -0{,}553199$$

$$l_2 = 2[-0{,}395142 + 0{,}5(0{,}4)(-0{,}790284)] - [0 + 0{,}5(0{,}4)(-0{,}395142)] + [0 + 0{,}5(0{,}4)]e^{[0+0{,}5(0{,}4)]} - [0 + 0{,}5(0{,}4)]$$

$$l_2 = -0{,}983089$$

$$k_3 = [-0{,}395142 + 0{,}5(0{,}4)(-0{,}983089)] = -0{,}59176$$

$$l_3 = 2[-0{,}395142 + 0{,}5(0{,}4)(-0{,}983089)] - [0 + 0{,}5(0{,}4)(-0{,}553199)] + [0 + 0{,}5(0{,}4)]e^{[0+0{,}5(0{,}4)]} - [0 + 0{,}5(0{,}4)]$$

$$l_3 = -1{,}028599$$

$$k_4 = [-0{,}395142 + (0{,}4)(-1{,}028599)] = -0{,}806582$$

$$l_4 = 2[-0{,}395142 + (0{,}4)(-1{,}028599)] - [0 + (0{,}4)(-0{,}59176)] + [0 + (0{,}4)]e^{[0+(0{,}2)]} - [0 + (0{,}4)] = -1{,}17973$$

Se determina el nuevo valor de **y** en función de las constantes k

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]h$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{6}[-0{,}395142 + 2(-0{,}553199) + 2(-0{,}59176) - 0{,}806582](0{,}4) = -0{,}232776$$

Se determina el nuevo valor de **z** en función de las constantes l

$$z_{i+1} = z_i = \frac{1}{6}[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4]h$$

$$z_1 = -0{,}395142 + \frac{1}{6}[-0{,}790284 + 2(-0{,}983089) + 2(-1{,}028599) - 1{,}17973](0{,}4) = -0{,}794701$$

Tabla 6.6. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

x	y	z	h	yi+1	zi+1
0	0	-0,395142	0,4	-0,232776	-0,794701
0,4	-0,232776	-0,794701	0,4	-0,642754	-1,235536
0,8	-0,642754	-1,235536	0,4	-1,162563	-1,204431
1,2	-1,162563	-1,204431	0,4	-1,372602	0,655813
1,6	-1,372602	0,655813	0,4	6,93E-06	7,4656073

K1	L1	K2	L2	K3	L3	K4	L4
-0,395142	-0,790284	-0,553199	-0,983089	-0,59176	-1,028599	-0,806582	-1,17973
-0,794701	-1,159897	-1,026681	-1,168374	-1,028376	-1,125369	-1,244849	-0,865138
-1,235536	-0,847885	-1,405113	-0,202083	-1,275953	0,0901529	-1,199475	1,5383255
-1,204431	1,5378421	-0,896862	3,8870047	-0,42703	4,7651561	0,7016318	9,0614904
0,655813	9,0090798	2,457629	15,246063	3,7050255	17,380493	7,60801	27,884724

ISBN: 978-631-6557-41-4

Se continua de la misma forma para las siguientes iteraciones, cuyos resultados se muestran en la tabla 6.6, y en la quinta iteración se obtiene que y (2) = 0,00000693 ≈ 0

Para problemas con valor en la frontera no lineal, la interpolación lineal a través de la solución de dos puntos no resulta necesariamente una aproximación segura de la condición en la frontera requerida para obtener una solución exacta. Un esquema alterno es el de realizar tres simulaciones o más y usar un polinomio de interpolación cuadrático o de mayor grado para calcular la condición en la frontera.

6.5.2 Método De Diferencias Finitas

Consiste en reemplazar las derivadas por fórmulas de diferencias finitas centrales

$$y` = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Ejemplo:

$$y'' = 2y' - y + xe^x - x$$

$$0 \le x \le 2, \qquad y(0) = 0 \qquad y(2) = 0$$

Solución

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 2\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) - y_i + x_i e^{x_i} - x_i$$

Para n = 4 $h = \frac{2-0}{5} = 0,4$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(0,4)^2} = 2\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(0,4)}\right) - y_i + x_i e^{x_i} - x_i$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(0,16)} = \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{(0,4)}\right) - y_i + x_i e^{x_i} - x_i$$

$$6,25\,y_{i+1} - 12,5y_i + 6,25\,y_{i-1} = 2,5\,y_{i+1} - 2,5\,y_{i-1} - y_i + x_i e^{x_i} - x_i$$

$$3,75\,y_{i+1} - 11,5y_i + 8,75\,y_{i-1} = x_i e^{x_i} - x_i$$

i = 1 $3{,}75\,y_2 - 11{,}5y_1 + 8{,}75\,y_0 = x_1\,e^{x_1} - x_1$

$$3{,}75\,y_2 - 11{,}5y_1 + 8{,}75(0) = 0{,}4e^{0,4} - 0{,}4$$

$$3{,}75\,y_2 - 11{,}5y_1 = 0{,}1967298$$

i = 2 $3{,}75\,y_3 - 11{,}5y_2 + 8{,}75\,y_1 = x_2\,e^{x_2} - x_2$

$$3{,}75\,y_3 - 11{,}5y_2 + 8{,}75\,y_1 = 0{,}8e^{0,8} - 0{,}8$$

$$3{,}75\,y_3 - 11{,}5y_2 + 8{,}75\,y_1 = 0{,}980433$$

i = 3 $3{,}75\,y_4 - 11{,}5y_3 + 8{,}75\,y_2 = x_3\,e^{x_3} - x_3$

$$3{,}75\,y_4 - 11{,}5y_3 + 8{,}75\,y_2 = 1{,}2e^{1,2} - 1{,}2$$

$$3{,}75\,y_4 - 11{,}5y_3 + 8{,}75\,y_2 = 2{,}784140$$

i = 4 $3{,}75\,y_5 - 11{,}5y_4 + 8{,}75\,y_3 = x_4\,e^{x_4} - x_4$

$$3{,}75\,y_5 - 11{,}5y_4 + 8{,}75\,y_3 = 1{,}6e^{1,6} - 1{,}6$$
$$-11{,}5y_4 + 8{,}75\,y_3 = -3{,}75(0) + 6{,}324852$$

$$\begin{bmatrix} -11{,}5 & 3{,}75 & 0 & 0 \\ 8{,}75 & -11{,}5 & 3{,}75 & \\ 0 & 8{,}75 & -11{,}5 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 8{,}75 & -11{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1967298 \\ 0{,}980433 \\ 2{,}784140 \\ 6{,}324852 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = -0{,}234323$$
$$y_2 = -0{,}66613$$
$$y_3 = -1{,}234596$$
$$y_4 = -1{,}489354$$

6.5.3 Problemas Con Valores En La Frontera No Lineal

Las ecuaciones diferenciales no lineales son aquellas en las que los términos relacionados con la variable dependiente están elevados a una potencia mayor que 1.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para resolver este tipo de problemas se pueden también utilizar:

Método del disparo. Este método consiste en convertir un problema con valores en la frontera en más de dos problemas de valor inicial.

Ejemplo:

$$y'' = y^3 - y\,y'$$

$$1 \le x \le 2, \qquad y(1) = 1/2 \qquad y(2) = 1/3 \qquad \text{h} = 0{,}25$$

Solución

$$\frac{d\,y}{d\,x} = z$$

$$\frac{d\,z}{d\,x} = y^3 - z\,y \qquad \text{y (1) = ½}$$

Se plantea como z (1) = - 0,3 y si se utiliza el método de Runge-Kutta de orden cuatro, se determina un juego de constantes k para la primera ecuación y un juego de constantes l para la segunda, las mismas que se calculan alternadamente de la siguiente manera

$$k_1 = z = -0{,}3$$

$$l_1 = (1/2)^3 - (1/2)(-0{,}3) = 0{,}275$$

$$k_2 = [1 + 0{,}5(0{,}25)(0{,}275)] = -0{,}265625$$

$$l_2 = (0{,}5 + (0{,}5)(0{,}25)(-0{,}3))^3 = (0{,}5 + (0{,}5)(0{,}25)(-0{,}3))(-0{,}3 + (0{,}5)(0{,}25)(0{,}275)) = 0{,}221783$$

$$k_3 = [1 + 0{,}5(0{,}25)(0{,}221783)] = -0{,}272277$$

$$\begin{aligned} l_3 = (0{,}5 + (0{,}5)(0{,}25)(-0{,}265625))^3 \\ = (0{,}5 + (0{,}5)(0{,}25)(-0{,}265625))(-0{,}3 + (0{,}5)(0{,}25)(0{,}221783)) \\ = 0{,}228813 \end{aligned}$$

$$k_4 = [1 + (0{,}25)(0{,}228813)] = -0{,}242797$$

$$\begin{aligned} l_4 = (0{,}5 + (0{,}25)(-0{,}228813))^3 \\ = (0{,}5 + (0{,}25)(-0{,}228813))(-0{,}3 + (0{,}25)(0{,}228813)) = 0{,}185454 \end{aligned}$$

Se determina el nuevo valor de **y** en función de las constantes k

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]h$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y_1 = 0{,}5 + \frac{1}{6}\left[1 + 2\left(-0{,}3\right) + 2\left(= -0{,}265625\right) + -0{,}272277\right]\left(-0{,}242797\right) = 0{,}432558$$

Se determina el nuevo valor de **z** en función de las constantes l

$$z_{i+1} = z_i = \frac{1}{6}\left[l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right]h$$

$$z_1 = -0{,}3 + \frac{1}{6}\left[1 + 2\left(0{,}275\right) + 2\left(= 0{,}221783\right) + 0{,}228813\right]\left(0{,}185454\right) = -0{,}243265$$

Se continua de la misma forma para las siguientes iteraciones, cuyos resultados se muestran en la tabla 6.4, y en la cuarta iteración se obtiene que y (2) = 0,288074 y como el valor de y (4) no es igual a 1/3 , se plantea un nuevo valor de z (1) = - 0,2, con el que se deberá trabajar nuevamente.

Tabla 6.7. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

Iteración	x	y	z	h	yi+1	zi+1	
1	1	0,5	-0,3	0,25	0,4325583	-0,243265	
2	1,25	0,4325583	-0,243265	0,25	0,3769181	-0,204189	
3	1,5	0,3769181	-0,204189	0,25	0,3295312	-0,176437	
4	1,75	0,3295312	-0,176437	0,25	0,2880735	-0,156269	
K1	**L1**	**K2**	**l2**	**K3**	**L3**	**K4**	**L4**
-0,3	0,275	-0,265625	0,2217832	-0,272277	0,2288128	-0,242797	0,1854542
-0,243265	0,1861607	-0,219995	0,1535085	-0,224076	0,1572232	-0,203959	0,130185
-0,204189	0,1305104	-0,187876	0,1094079	-0,190513	0,1114831	-0,176319	0,0937654
-0,176437	0,0939255	-0,164696	0,0797096	-0,166473	0,0809186	-0,156207	0,0688403

Tabla 6.8. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

Iteración	x	y	z	h	yi+1	zi+1	
1	1	0,5	-0,2	0,25	0,4563312	-0,1519	
2	1,25	0,4563312	-0,1519	0,25	0,42304	-0,116088	
3	1,5	0,42304	-0,116088	0,25	0,3976144	-0,08844	
4	1,75	0,3976144	-0,08844	0,25	0,3783564	-0,066409	
K1	**L1**	**K2**	**l2**	**K3**	**L3**	**K4**	**L4**
-0,2	0,225	-0,171875	0,1888125	-0,176398	0,1939786	-0,151505	0,163828
-0,1519	0,1643421	-0,131357	0,1410986	-0,134262	0,1441962	-0,115851	0,1245388
-0,116088	0,1248184	-0,100486	0,1092332	-0,102434	0,1112101	-0,088286	0,0978625
-0,08844	0,0980266	-0,076186	0,0872134	-0,077538	0,088544	-0,066304	0,0791868

Tabla 6.8. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

Iteración	x	y	z	h	yi+1	zi+1
1	1	0,5	-0,1	0,25	0,4800662	-0,060947

ISBN: 978-631-6557-41-4

2	1,25	0,4800662	-0,060947	0,25	0,4689362	-0,029066	
3	1,5	0,4689362	-0,029066	0,25	0,4651432	-0,001918	
4	1,75	0,4651432	-0,001918	0,25	0,4677246	0,0221655	
K1	**L1**	**K2**	**l2**	**K3**	**L3**	**K4**	**L4**
-0,1	0,175	-0,078125	0,1539434	-0,080757	0,1574078	-0,060648	0,1395608
-0,060947	0,1398965	-0,04346	0,1259863	-0,045199	0,1283771	-0,028853	0,116533
-0,029066	0,1167496	-0,014472	0,1074752	-0,015631	0,1092327	-0,001758	0,1013804
-0,001918	0,1015298	0,0107731	0,0954736	0,0100161	0,0968418	0,0222923	0,0918467
Iteración	**x**	**y**	**z**	**h**	**yi+1**	**zi+1**	
1	1	0,5	0	0,25	0,5037636	0,0295991	
2	1,25	0,5037636	0,0295991	0,25	0,5146165	0,0569706	
3	1,5	0,5146165	0,0569706	0,25	0,5321818	0,0835191	
4	1,75	0,5321818	0,0835191	0,25	0,5564158	0,110537	
K1	**L1**	**K2**	**l2**	**K3**	**L3**	**K4**	**L4**
0	0,125	0,015625	0,1171875	0,0146484	0,1191177	0,0297794	0,112768
0,0295991	0,112933	0,0437157	0,1084974	0,0431613	0,1100706	0,0571168	0,1068466
0,0569706	0,106968	0,0703416	0,1053226	0,0701359	0,1066819	0,0836411	0,1061869
0,0835191	0,1062758	0,0968036	0,1072409	0,0969242	0,1084858	0,1106405	0,110701

Los datos obtenidos necesarios se tabulan en la siguiente tabla.

y	0,5564158	0,4677246	0,3783564	0,2880735
z	0	-0,1	-0,2	-0,3

Con estos datos se aplica el proceso de interpolación de Lagrange de orden 3, para hallar el valor de "z" adecuado para $y_4 = 1/3 = 0{,}333333$

$$z(1) = \frac{(0{,}333333-0{,}4677246)(0{,}333333-0{,}3783564)(0{,}333333-0{,}2880735)}{(0{,}5564158-0{,}4677246)(0{,}5564158-0{,}3783564)(0{,}5564158-0{,}2880735)}(0)+$$
$$\frac{(0{,}333333-0{,}5564158)(0{,}333333-0{,}3783564)(0{,}333333-0{,}2880735)}{(0{,}4677246-0{,}4677246)(0{,}4677246-0{,}3783564)(0{,}4677246-0{,}2880735)}(-0{,}1)+$$
$$\frac{(0{,}333333-0{,}5564158)(0{,}333333-0{,}4677246)(0{,}333333-0{,}2880735)}{(0{,}3783564-0{,}4677246)(0{,}3783564-0{,}3783564)(0{,}3783564-0{,}2880735)}(-0{,}2)+$$
$$\frac{(0{,}333333-0{,}5564158)(0{,}333333-0{,}4677246)(0{,}333333-0{,}3783564)}{(0{,}2880735-0{,}4677246)(0{,}2880735-0{,}3783564)(0{,}2880735-0{,}2880735)}(-0{,}3)=-0{,}250021$$

Tabla 6.9. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

Iteración	**x**	**y**	**z**	**h**	**yi+1**	**zi+1**
1	1	0,5	-0,250021	0,25	0,4444445	-0,197549

ISBN: 978-631-6557-41-4

2	1,25	0,4444445	-0,197549	0,25	0,3999982	-0,160017	
3	1,5	0,3999982	-0,160017	0,25	0,3636319	-0,132247	
4	1,75	0,3636319	-0,132247	0,25	0,3333259	-0,111126	
K1	**L1**	**K2**	**l2**	**K3**	**L3**	**K4**	**L4**
-0,250021	0,2500105	-0,21877	0,2055428	-0,224328	0,2116212	-0,197116	0,1749831
-0,197549	0,1755912	-0,1756	0,1476646	-0,179091	0,1510809	-0,159779	0,1277017
-0,160017	0,1280055	-0,144016	0,1095958	-0,146317	0,1116339	-0,132108	0,0960085
-0,132247	0,0961716	-0,120225	0,0835488	-0,121803	0,084825	-0,111041	0,0739829

Método de diferencias finitas. Consiste en reemplazar las derivadas por fórmulas de diferencias finitas centrales

Ejemplo:

$$y'' = y^3 - y\,y'$$

$$1 \le x \le 2, \qquad y(1) = 1/2 \qquad y(2) = 1/3 \qquad h = 0{,}25$$

Solución

$$\frac{yi+1-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = y_i^3 - y_i\left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right)$$

$$16\,y_{i+1} - 32\,y_i + 16\,y_{i-1} = y_i^3 - y_i\left(2\,y_{i+1} - 2\,y_{i-1}\right)$$

$$16\,y_{i+1} - 32\,y_i + 16\,y_{i-1} = y_i^3 - 2y_i\,y_{i+1} + 2\,y_i\,y_{i-1}$$

i = 1

$$16\,y_2 - 32\,y_1 + 16\,y_0 = y_1^3 - 2y_1\,y_2 + 2\,y_1\,y_0$$

$$16\,y_2 - 32\,y_1 - y_1^3 + 2y_1\,y_2 - 2(0{,}5)\,y_1 + 16(0{,}5)$$

$$16\,y_2 - 32\,y_1 - y_1^3 + 2y_1\,y_2 - 2(0{,}5)\,y_1 + 8$$

i = 2

$$16\,y_3 - 32\,y_2 + 16\,y_1 = y_2^3 - 2y_2\,y_3 + 2\,y_2\,y_1$$

$$16\,y_3 - 32\,y_2 + 16\,y_1 - y_2^3 + 2y_2\,y_3 - 2\,y_2\,y_1$$

i = 1

$$16\,y_4 - 32\,y_3 + 16\,y_2 = y_3^3 - 2y_3\,y_4 + 2\,y_3\,y_2$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$-32\,y_3 + 16\,y_2 - y_3^3 - 2y_3\,y_2 + 2(1/3)y_3 + 16(1/3)$$
$$-32\,y_3 + 16\,y_2 - y_3^3 - 2y_3\,y_2 + 0{,}666667\,y_3 + 5{,}333333$$

Como se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se utilizará el método de Newton, para lo cual se debe obtener la matriz Jacobiana de este sistema

$$J(y) = \begin{bmatrix} -33 - 3\,y_1^2 + 2\,y_2 & 16 + 2\,y_1 & 0 \\ 16 - 2\,y_2 & -32 - 3\,y_2^2 + 2\,y_3 - 2\,y_1 & 16 + 2\,y_2 \\ 0 & 16 - 2\,y_3 & -32 - 2\,y_2 + 0{,}666667 \end{bmatrix}$$

Primera iteración

Se asumen como valores iniciales de $y_1 = 0{,}4$ de $y_2 = 0{,}37$ y de $y_3 = 0{,}34$, por lo que la matriz Jacobiana será

$$J(y) = \begin{bmatrix} -32{,}74 & 16{,}8 & 0 \\ 15{,}26 & -32{,}5307 & 16{,}74 \\ 0 & 15{,}32 & -32{,}0733 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz Jacobiana inversa

$$J(y)^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0448615 & -0{,}0307186 & -0{,}0160329 \\ -0{,}0279027 & -0{,}0598647 & -0{,}0312451 \\ -0{,}0133279 & -0{,}0285947 & -0{,}0461029 \end{bmatrix}$$

Estos mismos valores se reemplazan en el sistema y se obtiene

$$F(y) = \begin{bmatrix} 16(0{,}37) - 33(0{,}4) - (0{,}4)^3 + 2(0{,}4)(0{,}37) + 8 \\ 16(0{,}34) - 32(0{,}37) + 16(0{,}4) - (0{,}37)^3 + 2(0{,}37)(0{,}34) - 2(0{,}37)(0{,}4) \\ -32(0{,}34) + 16(0{,}37) - (0{,}34)^3 - 2(0{,}34)(0{,}37) + 0{,}666667(0{,}34) + 5{,}333333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}952 \\ -0{,}095053 \\ 0{,}3090958 \end{bmatrix}$$

Según el planteamiento de Newton se tiene en la primera iteración

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}37 \\ 0{,}34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}0448615 & -0{,}0307186 & -0{,}0160329 \\ -0{,}0279027 & -0{,}0598647 & -0{,}0312451 \\ -0{,}0133279 & -0{,}0285947 & -0{,}0461029 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}952 \\ -0{,}095053 \\ 0{,}3090958 \end{bmatrix}$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,37 \\ 0,34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0447439 \\ -0,0305308 \\ 0,0242204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4447439 \\ 0,4005308 \\ 0,3642204 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración

Con los valores obtenidos en la primera iteración se obtiene la nueva matriz Jacobiana.

$$J(y) = \begin{bmatrix} -32,79233 & 16,889488 & 0 \\ 15,198938 & -32,642322 & 16,801062 \\ 0 & 15,271559 & -32,134395 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz Jacobiana inversa

$$J(y)^{-1} = \begin{bmatrix} -0,0446793 & -0,0306033 & -0,0160006 \\ -0,0275401 & -0,0594189 & -0,0310664 \\ -0,0130882 & -0,0282382 & -0,0458833 \end{bmatrix}$$

Estos mismos valores se reemplazan en el sistema y se obtiene

$$F(y) = \begin{bmatrix} 0,000240 \\ -0,002316 \\ 0,0104911 \end{bmatrix}$$

Según el planteamiento de Newton se tiene en la segunda iteración

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,4447439 \\ 0,4005308 \\ 0,3642404 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,0446793 & -0,0306033 & -0,0160006 \\ -0,0275401 & -0,0594189 & -0,0310664 \\ -0,0130882 & -0,0282382 & -0,0458833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,000240 \\ -0,002316 \\ 0,0104911 \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,4447439 \\ 0,4005308 \\ 0,3642404 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,00022802 \\ 0,00045694 \\ 0,00054363 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4445159 \\ 0,4000739 \\ 0,3636767 \end{bmatrix}$$

En la tercera iteración, se obtienen los valores siguientes y no se ve un cambio muy significativo

y_1 = 0,4445159
y_2 = 0,4000806
y_3 = 0,3636866

ISBN: 978-631-6557-41-4

6.6 ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Las ecuaciones diferenciales parciales son las que tienen más de una variable independiente. La forma general de una ecuación diferencial de segundo orden que es la más utilizada para modelación es: (Ayres, 1969)

$$A\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D(x, y, T) = 0$$

Dependiendo del valor $B^2 - 4AC$, se clasifican en:

1. Elípticas $B^2 - 4AC < 0$
2. Parabólicas $B^2 - 4AC = 0$
3. Hiperbólicas $B^2 - 4AC > 0$

6.6.1 Ecuaciones Diferenciales Elípticas

Sirven para la modelación de problemas en estado estable o estacionario en los cuales no existen cambios en el tiempo. Estos problemas son tan variados como la distribución de temperatura en una placa. La distribución de temperatura en estado estacionario bidimensional se define por la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (6.38)$$

en donde T es la temperatura y x y y son las coordenadas. Las derivadas de la ecuación se aproximan usando diferencias finitas. La figura 6.4 muestra una malla bidimensional, esquema útil en las aproximaciones desarrolladas por la ecuación (6.38). Las aproximaciones por diferencias finitas divididas son:

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} \qquad (6.39)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\dfrac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} - \dfrac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x}}{\Delta x} \frac{+T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \qquad (6.40)$$

y de manera similar

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_i^{n+1} - 2T_i^n + T_i^{n-1}}{\Delta y^2} \qquad (6.41)$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Reemplazando las aproximaciones de las derivadas en la ecuación de Laplace (6.38) y suponiendo $\Delta x = \Delta y$ se tiene

$$T_{i+1}^{n} - T_{i-1}^{n} + T_{i}^{n+1} + T_{i}^{n-1} - 4T_{i}^{n} = 0 \qquad (6.42)$$

la cual es aplicable a cada nodo de la figura 6.4.

Ejemplo:

Se desea determinar la distribución de temperatura en la placa mostrada en la figura 6.4. Considérese que la placa plana mantiene dos de sus lados a 250 ºC y dos a 0 ºC.

Solución

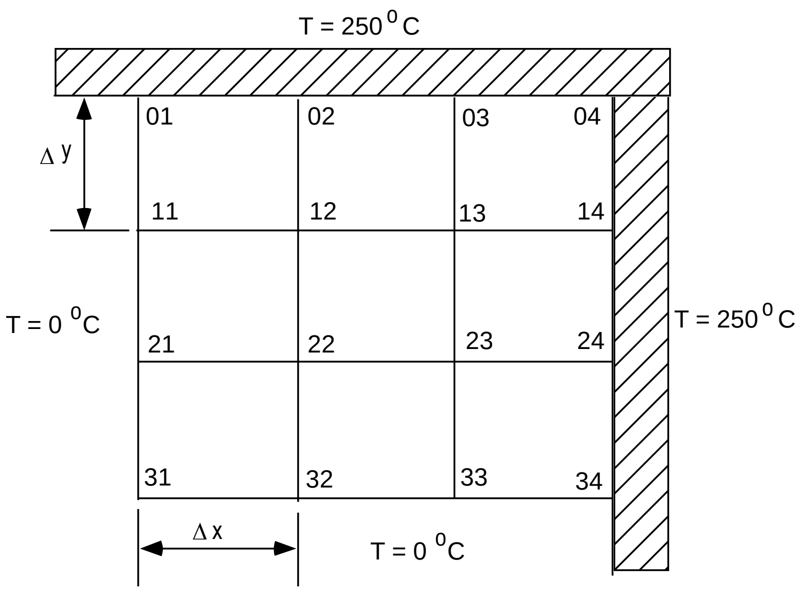


Figura 6.4. Mallado de la placa en estudio

Se realiza el mallado de la placa, dividiéndola en un determinado número de nodos internos, en este caso se ha dividido en nueve puntos. Aplicando la ecuación a cada nodo tenemos:

Para el nodo i = 1, n = 1

$$T_{2}^{1} - T_{0}^{1} + T_{1}^{2} + T_{1}^{0} - 4T_{1}^{1} = -250$$

Para el nodo i = 1, n = 2

$$T_{2}^{2} - T_{0}^{2} + T_{1}^{3} + T_{1}^{1} - 4T_{1}^{2} = -250$$

Para el nodo i = 1, n = 3

$$T_{2}^{3} - T_{0}^{3} + T_{1}^{4} + T_{1}^{2} - 4T_{1}^{3} = -500$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para el nodo i = 2, n = 1

$$T_3^1 - T_1^1 + T_2^2 + T_2^0 - 4T_2^1 = 0$$

Para el nodo i = 2, n = 2

$$T_3^2 - T_1^2 + T_2^3 + T_2^1 - 4T_2^2 = 0$$

Para el nodo i = 2, n = 3

$$T_3^3 - T_1^3 + T_2^4 + T_2^2 - 4T_2^3 = -250$$

Para el nodo i = 3, n = 1

$$T_4^1 - T_2^1 + T_3^2 + T_3^0 - 4T_3^1 = 0$$

Para el nodo i = 3, n = 2

$$T_4^2 - T_2^2 + T_3^3 + T_3^1 - 4T_3^2 = 0$$

Para el nodo i = 3, n = 3

$$T_4^3 - T_2^3 + T_3^4 + T_3^2 - 4T_3^3 = -250$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_1^3 \\ T_2^1 \\ T_2^2 \\ T_2^3 \\ T_3^1 \\ T_3^2 \\ T_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 \\ -250 \\ -500 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \\ 0 \\ 0 \\ -250 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$$T_1^1 = 125\ ^oC$$

$$T_1^2 = 178.5714\ ^oC$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$T_1^3 = 214.2857\ ^oC$$

$$T_2^1 = 71.42857\ ^oC$$
$$T_2^2 = 125\ ^oC$$
$$T_2^3 = 178.5714\ ^oC$$

$$T_3^1 = 35.71429\ ^oC$$
$$T_3^2 = 71.42857\ ^oC$$
$$T_3^3 = 125\ ^oC$$

6.6.2 Ecuaciones Parabólicas

Sirven para la modelación de problemas en estado inestable en los cuales la función es dependiente del tiempo. La forma general de estas ecuaciones es

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.43)$$

para $0 < x < L,\ t > 0$

Sujeta a las condiciones

u (0, t) = u (L, t) = 0, $\qquad$ t > 0

y $\qquad$ u (x, 0) = f (x), $\qquad$ $0 \leq x \leq L$

6.6.2.1. Método explícito.

Se reemplazan las derivadas parciales por aproximaciones de diferencias finitas en la ecuación (6.43)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \qquad (6.44)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad (6.45)$$

Obteniéndose

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right)$$

Desarrollando para u_i^n se tiene:

$$u_i^{n+1} = \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i+1}^n \qquad (6.46)$$

Para evitar que aparezcan oscilaciones divergentes en la solución el valor de $\lambda \leq ½$

Ejemplo:

Se desea cementar una placa de acero que tiene 0,10 % de carbono, colocándole en el interior de una cámara con una sustancia carburante de 0,70 % de carbono. Se desea determinar el tiempo que se demorará en obtener a 5 mm de profundidad un porcentaje de 0,70% de carbono.

Solución

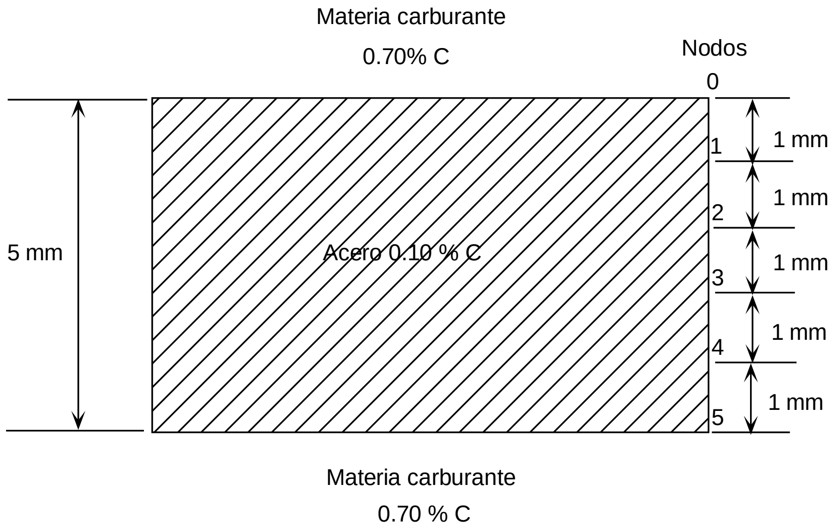


Figura 6.5. Placa de acero que se somete a carburación

La segunda ley de Fick para la difusión es

$$\frac{\partial c}{\partial y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad (6.47)$$

Donde D es el coeficiente de difusión, para este caso tenemos que el coeficiente de difusión del carbono en hierro γ es D = 10^{-6} cm^2 / s a 800 ºC .

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\lambda = D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2D} = \frac{(0.1)^2}{2(10^{-6})} = 500 \ \ seg. = 8{,}333 \ min = 0{,}1388889 \ horas$$

$$c_i^{n+1} = \lambda c_{i-1}^n + (1-2\lambda)c_i^n + \lambda c_{i+1}^n$$

si consideramos λ = ½, la ecuación explícita se simplifica a

$$c_i^{n+1} = \frac{1}{2}c_{i-1}^n + \frac{1}{2}c_{i+1}^n$$

Si dividimos este espesor de 5 mm en intervalos de 1 mm, tendremos cinco intervalos y cuatro puntos internos. Las condiciones de borde serían $c_o^n = 0{,}70$ en la superficie superior y $c_5^n = 0{,}7$ en la superficie inferior de la placa. En los nodos interiores $c_1^n = c_2^n = c_3^n = c_4^n = 0{,}10$ al inicio del proceso.

Para el primer intervalo de tiempo t = 0.138889 horas.

Para i = 1

$$c_1^{n+1} = 0{,}5c_o^n + 0{,}5c_2^n$$

$$c_1^{n+1} = 0{,}5(0{,}7) + 0{,}5(0{,}1) = 0{,}4$$

Para i = 2

$$c_2^{n+1} = 0{,}5c_1^n + 0{,}5c_3^n$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}5(0{,}1) + 0{,}5(0{,}1) = 0{,}1$$

Para i = 3

$$c_3^{n+1} = 0{,}5c_2^n + 0{,}5c_4^n$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}5(0{,}1) + 0{,}5(0{,}1) = 0{,}1$$

Para i = 4

$$c_4^{n+1} = 0{,}5c_3^n + 0{,}5c_5^n$$

$$c_4^{n+1} = 0{,}5(0{,}1) + 0{,}5(0{,}7) = 0{,}4$$

Para el segundo intervalo de tiempo t = 0,277778 horas.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para i = 1

$$c_1^{n+1} = 0{,}5c_o^n + 0{,}5c_2^n$$

$$c_1^{n+1} = 0{,}5(0{,}7) + 0{,}5(0{,}1) = 0{,}4$$

Para i = 2

$$c_2^{n+1} = 0{,}5c_1^n + 0{,}5c_3^n$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}5(0{,}4) + 0{,}5(0{,}1) = 0{,}25$$

Para i = 3

$$c_3^{n+1} = 0{,}5c_2^n + 0{,}5c_4^n$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}5(0{,}1) + 0{,}5(0{,}4) = 0{,}25$$

Para i = 4

$$c_4^{n+1} = 0{,}5c_3^n + 0{,}5c_5^n$$

$$c_4^{n+1} = 0{,}5(0{,}1) + 0{,}5(0{,}7) = 0{,}4$$

Para el tercer intervalo de tiempo t = 0.41667 horas.

Para i = 1

$$c_1^{n+1} = 0{,}5c_o^n + 0{,}5c_2^n$$

$$c_1^{n+1} = 0{,}5(0{,}7) + 0{,}5(0{,}25) = 0{,}475$$

Para i = 2

$$c_2^{n+1} = 0{,}5c_1^n + 0{,}5c_3^n$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}5(0{,}4) + 0{,}5(0{,}25) = 0{,}325$$

Para i = 3

$$c_3^{n+1} = 0{,}5c_2^n + 0{,}5c_4^n$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}5(0{,}25) + 0{,}5(0{,}4) = 0{,}325$$

Para i = 4

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$c_4^{n+1} = 0,5c_3^n + 0,5c_5^n$$

$$c_4^{n+1} = 0,5(0,25) + 0,5(0,7) = 0,475$$

Y así sucesivamente hasta que se tenga a 5 mm de la superficie un contenido de carbono de 0.70 %. Se puede ver, que las ecuaciones se pueden resolver individualmente, porque no son ecuaciones acopladas.

6.6.2.2. Método implícito

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \qquad (6.48)$$

Reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones de diferencias finitas se tiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \qquad (6.49)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{c_{i-1}^{n+1} + c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1}}{(\Delta x)^2} \qquad (6.50)$$

Obteniéndose

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{c_{i-1}^{n+1} + c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right)$$

Desarrollando para c_i^n se tiene:

$$(1 + 2\lambda)c_i^{n+1} - \lambda\, c_{i-1}^{n+1} - \lambda\, c_{i+1}^{n+1} = c_i^n \qquad (6.51)$$

Ejemplo:

Para el mismo ejemplo planteado anteriormente, si $\lambda = ½$

Solución

$$(1 + 2\lambda)c_i^{n+1} - \lambda\, c_{i-1}^{n+1} - \lambda\, c_{i+1}^{n+1} = c_i^n$$

Para el primer intervalo de tiempo t = 0,138889 horas

Para i = 1

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$2c_1^{n+1} - \frac{1}{2}c_0^{n+1} - \frac{1}{2}c_2^{n+1} = c_i^n$$

$$2c_1^{n+1} - \frac{1}{2}c_2^{n+1} = 0{,}1 + \frac{1}{2}(0{,}70) = 0{,}45$$

Para i = 2

$$2c_2^{n+1} - \frac{1}{2}c_1^{n+1} - \frac{1}{2}c_3^{n+1} = c_2^n$$

$$2c_2^{n+1} - \frac{1}{2}c_1^{n+1} - \frac{1}{2}c_3^{n+1} = 0{,}1$$

Para i = 3

$$2c_3^{n+1} - \frac{1}{2}c_2^{n+1} - \frac{1}{2}c_4^{n+1} = c_3^n$$

$$2c_3^{n+1} - \frac{1}{2}c_2^{n+1} - \frac{1}{2}c_4^{n+1} = 0{,}1$$

Para i = 4

$$2c_4^{n+1} - \frac{1}{2}c_3^{n+1} - \frac{1}{2}c_5^{n+1} = c_4^n$$

$$2c_4^{n+1} - \frac{1}{2}c_3^{n+1} - \frac{1}{2}c_5^{n+1} = 0{,}1 + \frac{1}{2}(0{,}7) = 0{,}45$$

Tomando los coeficientes de todas las ecuaciones y expresando en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ c_3^{n+1} \\ c_4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}10 \\ 0{,}10 \\ 0{,}45 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$c_1^{n+1} = 0{,}263636$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}154545$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}154545$$

$$c_4^{n+1} = 0{,}263636$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para el segundo intervalo de tiempo t = 0,277778 horas

Para i = 1

$$2u_1^{n+1} - \frac{1}{2}u_0^{n+1} - \frac{1}{2}u_2^{n+1} = u_i^n$$

$$2u_1^{n+1} - \frac{1}{2}u_2^{n+1} = 0{,}263636 + \frac{1}{2}(0{,}70) = 0{,}613636$$

Para i = 2

$$2u_2^{n+1} - \frac{1}{2}u_1^{n+1} - \frac{1}{2}u_3^{n+1} = u_2^n$$

$$2u_2^{n+1} - \frac{1}{2}u_1^{n+1} - \frac{1}{2}u^{n+1} = 0{,}154545$$

Para i = 3

$$2u_3^{n+1} - \frac{1}{2}u_2^{n+1} - \frac{1}{2}u_4^{n+1} = u_3^n$$

$$2u_3^{n+1} - \frac{1}{2}u_{21}^{n+1} - \frac{1}{2}u_4^{n+1} = 0{,}154545$$

Para i = 4

$$2u_4^{n+1} - \frac{1}{2}u_3^{n+1} - \frac{1}{2}u_5^{n+1} = u_4^n$$

$$2u_4^{n+1} - \frac{1}{2}u_3^{n+1} - \frac{1}{2}u_5^{n+1} = 0{,}263636 + \frac{1}{2}(0{,}7) = 0{,}613636$$

Tomando los coeficientes de todas las ecuaciones y expresando en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ c_3^{n+1} \\ c_4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.613636 \\ 0.154545 \\ 0.154545 \\ 0.613636 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$c_1^{n+1} = 0{,}36281$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}223967$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}223967$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$c_4^{n+1} = 0{,}36281$$

6.6.2.3. Método de Crank-Nicolson

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{6.52}$$

Reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones de diferencias finitas. La primera derivada por diferencias finitas hacia delante se tiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \tag{6.53}$$

La segunda derivada se la obtiene como el promedio entre las diferencias finitas centrales del método explícito y el implícito

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_{i-1}^{n+1} + c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{c_{i-1}^{n} + c_{i+1}^{n} - 2c_i^{n}}{(\Delta x)^2} \right) \tag{6.54}$$

$$\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{1}{2}\left(\frac{c_{i-1}^{n+1} + c_{i+1}^{n+1} - 2c_i^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{c_{i-1}^{n} + c_{i+1}^{n} - 2c_i^{n}}{(\Delta x)^2} \right)$$

Desarrollando y ordenando términos se tiene:

$$(2 + 2\lambda)c_i^{n+1} - \lambda c_{i-1}^{n+1} - \lambda\, c_{i+1}^{n+1} = (2 - 2\lambda)c_i^n + \lambda\, c_{i-1}^n + \lambda\, c_{i+1}^n \tag{6.55}$$

Ejemplo:

Para el mismo ejemplo planteado anteriormente.

Solución

Pero para facilidad se considera que $\lambda = 1$, entonces la ecuación se reduce a

$$4c_i^{n+1} - c_{i-1}^{n+1} - c_{i+1}^{n+1} = c_{i-1}^n + c_{i+1}^n \tag{6.56}$$

Como $\lambda = \dfrac{D(\Delta t)}{(\Delta x)^2} = 1$, entonces

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{D} = \frac{(0.1)^2}{(10^{-6})} = 1000\ seg. = 16{,}66667\ min. = 0{,}277778\ horas$$

Para el intervalo de tiempo t = 0,277778 horas, se tiene:

Se recuerda que las condiciones de borde $c_0^{n+1} = c_0^n = 0{,}7$ y $c_5^{n+1} = c_5^n = 0{,}7$

Para i = 1

$$4c_1^{n+1} - c_0^{n+1} - c_2^{n+1} = c_0^n + c_2^n$$

$$4c_1^{n+1} - c_2^{n+1} = 0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}1 = 1{,}5$$

Para i = 2

$$4c_2^{n+1} - c_1^{n+1} - c_3^{n+1} = c_1^n + c_3^n$$

$$4c_2^{n+1} - c_1^{n+1} - c_2^{n+1} = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$$

Para i = 3

$$4c_3^{n+1} - c_2^{n+1} - c_4^{n+1} = c_2^n + c_4^n$$

$$4c_3^{n+1} - c_2^{n+1} - c_4^{n+1} = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$$

Para i = 4

$$4c_4^{n+1} - c_3^{n+1} - c_5^{n+1} = c_3^n + c_5^n$$

$$4c_4^{n+1} - c_3^{n+1} - c_5^{n+1} = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}3$$

Tomando los coeficientes de todas las ecuaciones y expresando en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ c_3^{n+1} \\ c_4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$c_1^{n+1} = 0{,}421531$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}186124$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}122967$$

$$c_4^{n+1} = 0{,}105742$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

Para el intervalo de tiempo t = 0.555556 horas, se tiene:

Para i = 1

$$4c_1^{n+1} - c_0^{n+1} - c_2^{n+1} = c_0^n + c_2^n$$

$$4c_1^{n+1} - c_2^{n+1} = 0{,}7 + 0{,}7 + 0{,}186124 + 0{,}1 = 1{,}586124$$

Para i = 2

$$4c_2^{n+1} - c_1^{n+1} - c_3^{n+1} = c_1^n + c_3^n$$

$$4c_2^{n+1} - c_1^{n+1} - c_2^{n+1} = 0{,}421531 + 0{,}122967 = 0{,}544498$$

Para i = 3

$$4c_3^{n+1} - c_2^{n+1} - c_4^{n+1} = c_2^n + c_4^n$$

$$4c_3^{n+1} - c_2^{n+1} - c_4^{n+1} = 0{,}186124 + 0{,}105742 = 0{,}291866$$

Para i = 4

$$4c_4^{n+1} - c_3^{n+1} - c_5^{n+1} = c_3^n + c_5^n$$

$$4c_4^{n+1} - c_3^{n+1} - c_5^{n+1} = 0{,}122967 + 0{,}1 = 0{,}222967$$

Tomando los coeficientes de todas las ecuaciones y expresando en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ c_3^{n+1} \\ c_4^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}586124 \\ 0{,}544498 \\ 0{,}291866 \\ 0{,}222967 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$c_1^{n+1} = 0{,}470722$$

$$c_2^{n+1} = 0{,}296763$$

$$c_3^{n+1} = 0{,}171836$$

$$c_4^{n+1} = 0{,}0987 \approx 0.1$$

6.6.3 Ecuaciones Diferenciales Hiperbólicas

Se aplican para la modelación del movimiento de cuerdas o membranas.

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.52}$$

Reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones de diferencias finitas. La primera derivada por diferencias finitas hacia adelante se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{6.53}$$

La segunda derivada se la obtiene como el promedio entre las diferencias finitas centrales del método explícito y el implícito

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{6.54}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$$

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = \lambda^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

$$u_i^{n+1} = 2(1-\lambda^2) u_i^n + \lambda^2 u_{i+1}^n + \lambda^2 u_{i-1}^n - u_i^{n-1}$$

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = g(x_i)$$

$$u_i^{n-1} = u_i^{n+1} - 2g(x_i)\Delta t$$

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n+1} + 2g(x_i)\Delta t$$

$$2u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n + 2g(x_i)\Delta t$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) + g(x_i)\Delta t$$

Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1$$

Condiciones de frontera

ISBN: 978-631-6557-41-4

u (0, t) = u (1, t) = 0

Condiciones iníciales

u (x, 0) = sen π x = f (x)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g\,(x) = 0$$

$$\lambda = \frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x} = \frac{2\left(0{,}125\right)}{0{,}25} = 1$$

$$u_0^0 = u_4^0 = 0$$

i = 1 $x_1 = 0{,}25$ $u_1^0 = sen\,\pi\left(0{,}25\right) = 0{,}7071$

i = 2 $x_2 = 0{,}5$ $u_2^0 = sen\,\pi\left(0{,}5\right) = 1$

i = 3 $x_3 = 0{,}75$ $u_3^0 = sen\,\pi\left(0{,}75\right) = 0{,}7071$

Primera iteración

i = 1 n = 0 $u_1^1 = \frac{1}{2}\left(u_2^0 + u_0^0\right) = \frac{1}{2}\left(1+0\right) = 0{,}5$

i = 2 n = 0 $u_2^1 = \frac{1}{2}\left(u_3^0 + u_1^0\right) = \frac{1}{2}\left(0{,}7071 + 0{,}7071\right) = 0{,}7071$

i = 3 n = 0 $u_3^1 = \frac{1}{2}\left(u_4^0 + u_2^0\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 5\right) = 0{,}5$

Segunda iteración

i = 1 n= 1 $u_1^2 = \frac{1}{2}\left(u_2^1 + u_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(0{,}7071 + 0\right) = 0{,}35355$

i = 2 n = 1 $u_2^2 = \frac{1}{2}\left(u_3^1 + u_1^1\right) = \frac{1}{2}\left(0{,}5 + 0{,}5\right) = 0{,}5$

i = 3 n = 1 $u_3^2 = \frac{1}{2}\left(u_4^1 + u_2^1\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 0{,}7071\right) = 0{,}35355$

6.7 APLICACIONES A LA INGENIERÍA

1. La razón de enfriamiento de un cuerpo se puede expresar como

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_a\right) \tag{6.57}$$

donde T es la temperatura del cuerpo (ºC), T_a es la temperatura ambiente del medio que rodea al cuerpo (ºC). Si se calienta un pedazo de aluminio a 120 ºC y se sumerge luego en agua a una temperatura T_a de 15 ºC, determinar el tiempo que tarda el material en enfriarse hasta 50 ºC si k = 0,15 $min^{-1.}$

Solución

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}15\left(T - 15\right) = -0{,}15T + 2{,}25$$

Si se aplica a esta ecuación el método de Runge-Kutta con un paso de h = 0.1 s Se tiene

Primera iteración para t = 0.1 s

$$k_1 = -0{,}15\left(120\right) + 2{,}25 = -15{,}75$$

$$k_2 = -0{,}15\left(120 + 0{,}5(0{,}1)(-15{,}75)\right) + 2{,}25 = -15{,}631875$$

$$k_3 = -0{,}15\left(120 + 0{,}5(0{,}1)(-15{,}631875)\right) + 2{,}25 = -15{,}632761$$

$$k_4 = -0{,}15\left(120 + (0{,}1)(-15{,}633014)\right) + 2{,}25 = -15{,}515509$$

$$T_1 = 120 + \frac{1}{6}\left[-15{,}75 + 2\left(-15{,}631875\right) + 2\left(-15{,}632761\right) - 15{,}515509\right]\left(0{,}1\right) = 118{,}436754 \quad {}^{o}C$$

Segunda iteración para t = 0,2 s

$$k_1 = -0{,}15\left(118{,}436754\right) + 2{,}25 = -15{,}515513$$

$$k_2 = -0{,}15\left(118{,}436754 + 0{,}5(0{,}1)(-15{,}515513)\right) + 2{,}25 = -15{,}399147$$

$$k_3 = -0{,}15\left(118{,}436754 + 0{,}5(0{,}1)(-15{,}399147)\right) + 2{,}25 = -15{,}634506$$

$$k_4 = -0{,}15\left(118{,}436754 + (0{,}1)(-15{,}633014)\right) + 2{,}25 = -15{,}515482$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$T_1 = 118{,}436754 + \frac{1}{6}\left[-15{,}515513 + 2\left(-15{,}399147\right) + 2\left(-15{,}634506\right) - 15{,}515482\right]\left(0{,}1\right) = 116{,}885115 \quad {}^oC$$

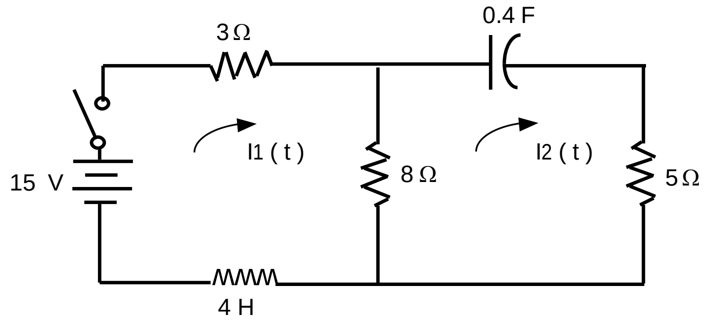
Se procede así hasta alcanzar la temperatura buscada, en este caso en la iteración 21 se alcanza aproximadamente los 90 ºC luego de transcurridos 2, 1 s Como se puede ver en la tabla 6.4.

Tabla 6.4. Resultados obtenidos por el método de Runge-Kutta de orden 4.

Iterac.	h	T	K1	K2	K3	K4	T
1	0,1	120	-15,75	-15,631875	-15,6327609	-15,5155086	118,436754
2	0,1	118,436754	-15,515513	-15,3991467	-15,6345064	-15,5154824	116,885115
3	0,1	116,885115	-15,2827673	-15,1681465	-15,6362389	-15,5154564	115,344999
4	0,1	115,344999	-15,0517498	-14,9388617	-15,6379585	-15,5154306	113,816318
5	0,1	113,816318	-14,8224478	-14,7112794	-15,6396654	-15,515405	112,298989
6	0,1	112,298989	-14,5948484	-14,485387	-15,6413596	-15,5153796	110,792927
7	0,1	110,792927	-14,3689391	-14,2611721	-15,6430412	-15,5153544	109,298049
8	0,1	109,298049	-14,1447073	-14,038622	-15,6447103	-15,5153293	107,81427
9	0,1	107,81427	-13,9221405	-13,8177245	-15,6463671	-15,5153045	106,34151
10	0,1	106,34151	-13,7012265	-13,5984673	-15,6480115	-15,5152798	104,879685
11	0,1	104,879685	-13,4819528	-13,3808382	-15,6496437	-15,5152553	103,428716
12	0,1	103,428716	-13,2643074	-13,1648251	-15,6512638	-15,515231	101,988521
13	0,1	101,988521	-13,0482781	-12,950416	-15,6528719	-15,5152069	100,55902
14	0,1	100,55902	-12,8338529	-12,737599	-15,654468	-15,515183	99,1401334
15	0,1	99,1401334	-12,62102	-12,5263624	-15,6560523	-15,5151592	97,7317833
16	0,1	97,7317833	-12,4097675	-12,3166942	-15,6576248	-15,5151356	96,3338909
17	0,1	96,3338909	-12,2000836	-12,108583	-15,6591856	-15,5151122	94,9463787
18	0,1	94,9463787	-11,9919568	-11,9020171	-15,6607349	-15,515089	93,5691696
19	0,1	93,5691696	-11,7853754	-11,6969851	-15,6622726	-15,5150659	92,202187
20	0,1	92,202187	-11,580328	-11,4934756	-15,6637989	-15,515043	90,8453549
21	0,1	90,8453549	-11,3768032	-11,2914772	-15,6653139	-15,5150203	89,4985982

2. En el circuito mostrado en la figura 6.6, determinar la corriente I_1 (t) e I_2 (t) en el instante t = 0.2 s, luego de cerrar el circuito. Según la ley de Kirchhoff en un circuito cerrado que contiene una resistencia de R ohms, una capacitancia de C faradios, una inductancia de L henrios y una fuente de voltaje E (t), la corriente I (t) satisface la ecuación

$$L\frac{dI}{dt} + RI\left(t\right) + \frac{1}{c}\int I\left(t\right)dt = E\left(t\right) \qquad (6.58)$$



ISBN: 978-631-6557-41-4

Figura 6.6. Circuito Eléctrico

Solución

Aplicando la ecuación, se realiza el análisis en cada una de las mallas. Para la malla 1 se tiene

$$4\frac{dI_1}{dt}+3I_1+8\left(I_1-I_2\right)=12$$

resolviendo se tiene

$$\frac{dI_1}{dt}=3-2.75I_1+2I_2$$

para la malla 2 de igual forma se tiene

$$5I_1+8\left(I_2-I_1\right)+\frac{1}{0.4}\int I_2\,dt=0$$

resolviendo se tiene

$$\int I_2\,dt=1.2I_1-3.2I_2$$

derivando toda la ecuación

$$I_2=1.2I'_1-3.2I'_2$$

reemplazando el valor de I'_1 y despejando I'_2 se tiene

$$I_2=1.2\left(3-2.75I_1+2I_2\right)-3.2I'_2$$

$$\frac{dI_2}{dt}=1.125-1.03125I_1+0.75I_2$$

Si se aplica a este sistema de dos ecuaciones el método de Runge-Kutta con un paso de h = 0.1 s Se tiene

Primera iteración para t = 0,1 s

$$k_1=3-2.75\left(0\right)+2\left(0\right)=3$$

$$L_1=1.125-1.03125\left(0\right)+0.75\left(0\right)=1.125$$

$$k_2=3-2.75\left(0+\frac{1}{2}\left(0.1\right)\left(3\right)\right)+2\left(0+\frac{1}{2}\left(0.1\right)\left(1.125\right)\right)=2.7$$

$$L_2=1.125-1.03125\left(0+\frac{1}{2}\left(0.1\right)\left(3\right)\right)+0.75\left(0+\frac{1}{2}\left(0.1\right)\left(1.125\right)\right)=1.0125$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$k_3 = 3 - 2.75\left(0 + \frac{1}{2}(0.1)(2.7)\right) + 2\left(0 + \frac{1}{2}(0.1)(1.0125)\right) = 2.73$$

$$L_3 = 1.125 - 1.03125\left(0 + \frac{1}{2}(0.1)(2.7)\right) + 0.75\left(0 + \frac{1}{2}(0.1)(1.0125)\right) = 1.02375$$

$$k_4 = 3 - 2.75(0 + (0.1)(2.73)) + 2(0 + (0.1)(1.02375)) = 2.454$$

$$L_4 = 1.125 - 1.03125(0 + (0.1)(2.73)) + 0.75(0 + (0.1)(1.02375)) = 0.92025$$

$$I_1 = \frac{1}{6}[3 + 2(2.7) + 2(2.73) + 2.454](0.1) = 0.2719 \quad \textit{Amperios}$$

$$I_2 = \frac{1}{6}[1.125 + 2(1.0125) + 2(1.02375) + 0.92025](0.1) = 0.101962 \quad \textit{Amperios}$$

Segunda iteración para t = 0,2 s

$$k_1 = 3 - 2.75(0.2719) + 2(0.101962) = 2.456199$$

$$L_1 = 1.125 - 1.03125(0.2719) + 0.75(0.101962) = 0.921075$$

$$k_2 = 3 - 2.75\left(0.2719 + \frac{1}{2}(0.1)(3)\right) + 2\left(0.101962 + \frac{1}{2}(0.1)(1.125)\right) = 2.21058$$

$$L_2 = 1.125 - 1.03125\left(0.2719 + \frac{1}{2}(0.1)(3)\right) + 0.75\left(0.101962 + \frac{1}{2}(0.1)(1.125)\right) = 0.828967$$

$$k_3 = 3 - 2.75\left(0.2719 + \frac{1}{2}(0.1)(2.7)\right) + 2\left(0.101962 + \frac{1}{2}(0.1)(1.0125)\right) = 2.235142$$

$$L_3 = 1.125 - 1.03125\left(0.2719 + \frac{1}{2}(0.1)(2.7)\right) + 0.75\left(0.101962 + \frac{1}{2}(0.1)(1.0125)\right) = 0.838178$$

$$k_4 = 3 - 2.75(0.2719 + (0.1)(2.73)) + 2(0.101962 + (0.1)(1.02375)) = 2.232686$$

$$L_4 = 1.125 - 1.03125(0.2719 + (0.1)(2.73)) + 0.75(0.101962 + (0.1)(1.02375)) = 0.753439$$

$$I_1 = \frac{1}{6}[2.456199 + 2(2.21058) + 2(2.235142) + 2.232686](0.1) = 0.226339 \quad \textit{Amperios}$$

$$I_2 = \frac{1}{6}[0.921075 + 2(0.828967) + 2(0.838178) + 0.753439](0.1) = 0.083480 \quad \textit{Amperios}$$

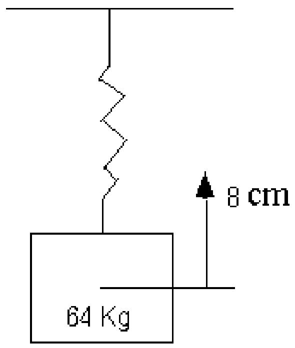
Y así en forma sucesiva hasta cubrir el intervalo de tiempo deseado

ISBN: 978-631-6557-41-4

3. Un contrapeso de 64 Kg se une a un resorte de 80 cm de longitud. En la posición de equilibrio, el resorte mide 100 cm. El coeficiente de amortiguamiento es igual a la velocidad instantánea. Si el contrapeso se eleva y se suelta del reposo en un punto a 8 pulg arriba de la posición de equilibrio, determine los desplazamientos, x(t).

$$F = k\,\delta \qquad\qquad k = \frac{F}{\delta}$$

$$k = \frac{(24\ Kg)\ (980\ cm/seg^2)}{(100-80)\ cm} = 1176\ Kg/seg^2$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$64\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 1176\,x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}015625\frac{dx}{dt} + 18{,}375\,x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

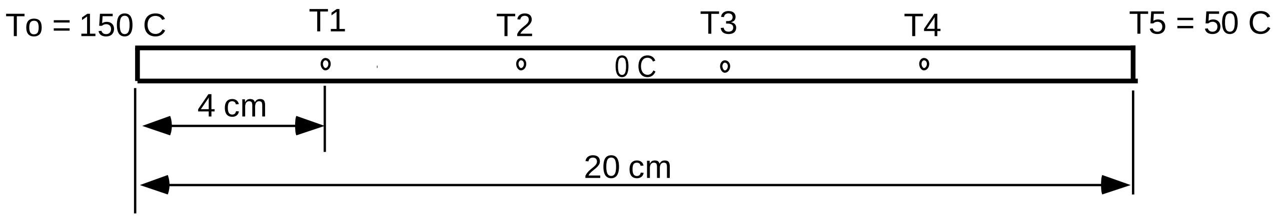
$$\frac{dv}{dt} = -0{,}015625\,v - 18{,}375\,x$$

Utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, se tiene:

x	v	t	h	xi+1	vi+1		
-8	0	0	0,1	-7,276637	14,238686		
-7,276637	14,238686	0,1	0,1	-5,239497	25,880888		
-5,239497	25,880888	0,1	0,1	-2,258870	32,827003		
K1	**L1**	**K2**	**L2**	**K3**	**L3**	**K4**	**L4**
0	147	7,35	146,885156	7,344258	140,132433	14,013243	133,285969
14,238686	133,485732	20,912972	120,299654	20,253668	114,177954	25,656481	96,0912129
25,880888	95,871360	30,674456	72,018394	29,481808	67,632939	32,644182	41,5928609

ISBN: 978-631-6557-41-4

3. Determinar cómo varia la temperatura en una barra de 20 cm de longitud, que está sometida a las siguientes temperaturas en sus dos extremos, para este propósito utilice los métodos explicito, implícito y de Crank-Nicolson.



Solución

Condición inicial

$T^o{}_1 = T^o{}_2 = T^o{}_3 = T^o{}_4 = 0$

Condiciones de frontera

$T^o{}_0 = T^1{}_0 = T^2{}_0 = \ldots = T^n{}_0 = 150^oC$

$T^o{}_5 = T^1{}_5 = T^2{}_5 = \ldots = T^n{}_5 = 50^oC$

$$\lambda = \frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x} = \frac{2(0{,}125)}{0{,}25} = 1$$

$$\lambda = \frac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{0{,}825(0{,}1)}{(4)^2} = 0{,}00515625$$

Método explicito

$$1 - 2\lambda = 1 - 2\,(0{,}00515625) = 0{,}9896875$$

Primera iteración

$$u_i^{n+1} = \lambda\, u_{i+1}^n + (1-2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n$$

i = 1 n = 0

$$u_1^1 = 0{,}00515625\,u_2^0 + 0{,}9896875\,u_1^0 + 0{,}00515625\,u_0^0$$
$$u_1^1 = 0{,}00515625(0) + 0{,}9896875(0) + 0{,}00515625(150) = 0{,}7734375$$

i = 2 n = 0

$$u_2^1 = 0{,}00515625\,u_3^0 + 0{,}9896875\,u_2^0 + 0{,}00515625\,u_1^0$$

$$u_2^1 = 0{,}00515625\,(0) + 0{,}9896875\,(0) + 0{,}00515625\,(0) = 0$$

i = 3 n = 0

$$u_3^1 = 0{,}00515625\,u_4^0 + 0{,}9896875\,u_3^0 + 0{,}00515625\,u_2^0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$u_3^1 = 0{,}00515625(0) + 0{,}9896875(0) + 0{,}00515625(0) = 0$$

i = 4 n = 0 $u_4^1 = 0{,}00515625u_5^0 + 0{,}9896875u_4^0 + 0{,}00515625u_3^0$

$$u_4^1 = 0{,}00515625(50) + 0{,}9896875(0) + 0{,}00515625(0) = 0{,}2578125$$

Segunda iteración

$u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + (1-2\lambda)u_i^n + \lambda u_{i-1}^n$

i = 1 n = 1 $u_1^2 = 0{,}00515625u_2^1 + 0{,}9896875u_1^1 + 0{,}00515625u_0^1$

$$u_1^2 = 0{,}00515625(0) + 0{,}9896875(0{,}7734375) + 0{,}00515625(150) = 1{,}5388989$$

i = 2 n = 1 $u_2^2 = 0{,}00515625u_3^1 + 0{,}9896875u_2^1 + 0{,}00515625u_1^1$

$$u_2^2 = 0{,}00515625(0) + 0{,}9896875(0) + 0{,}00515625(0{,}7734375) = 0{,}0039880$$

i = 3 n = 1 $u_3^2 = 0{,}00515625u_4^1 + 0{,}9896875u_3^1 + 0{,}00515625u_2^1$

$$u_3^2 = 0{,}00515625(0{,}2578125) + 0{,}9896875(0) + 0{,}00515625(0) = 0{,}00132934$$

i = 4 n = 1 $u_4^2 = 0{,}00515625u_5^1 + 0{,}9896875u_4^1 + 0{,}00515625u_3^1$

$$u_4^2 = 0{,}00515625(50) + 0{,}9896875(0{,}2578125) + 0{,}00515625(0) = 0{,}5129663$$

Método Implícito

$(1+2\lambda) = 1 + 2\,(0{,}00515625) = 1{,}0103125$

Primera iteración

$$(1+2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda\, T_{i+1}^{n+1} - \lambda\, T_{i-1}^{n+1} = T_i^n$$

i = 1 n = 0 $1{,}0103125T_1^1 - 0{,}00515625T_2^1 - 0{,}00515625T_0^1 = T_1^0$

$$1{,}0103125T_1^1 - 0{,}00515625T_2^1 = 0 + 0{,}00515625\ (150) = 0{,}7734375$$

i = 2 n = 0 $1{,}0103125T_2^1 - 0{,}00515625T_3^1 - 0{,}00515625T_1^1 = T_2^0$

$$1{,}0103125T_2^1 - 0{,}00515625T_3^1 - 0{,}00515625T_1^1 = 0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

i = 3 n = 0 $1{,}0103125T_3^1 - 0{,}00515625T_4^1 - 0{,}00515625T_2^1 = T_3^0$

$$1{,}0103125T_3^1 - 0{,}00515625T_4^1 - 0{,}00515625T_2^1 = 0$$

i = 4 n = 0 $1{,}0103125T_4^1 - 0{,}00515625T_5^1 - 0{,}00515625T_3^1 = T_4^0$

$$1{,}0103125T_4^1 - 0{,}00515625T_3^1 = 0 + 0{,}00515625\,(50) = 0{,}2578125$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 & 0 \\ -0{,}00515625 & 1{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 \\ 0 & -0{,}00515625 & 1{,}0103125 & -0{,}00515625 \\ 0 & 0 & -0{,}00515625 & 1{,}0103125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7734375 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}2578125 \end{bmatrix}$$

$T_1^1 = 0{,}7655628$
$T_2^1 = 0{,}00391389$
$T_3^1 = 0{,}00132236$
$T_4^1 = 0{,}2551877$

Segunda iteración

$$(1+2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda\, T_{i+1}^{n+1} - \lambda\, T_{i-1}^{n+1} = T_i^n$$

i = 1 n = 1 $1{,}0103125T_1^2 - 0{,}00515625T_2^2 - 0{,}00515625T_0^2 = T_1^1$

$$1{,}0103125T_1^2 - 0{,}00515625T_2^2 = 0{,}00515625\,(150) + 0{,}7655628 = 1{,}5390003$$

i = 2 n = 1 $1{,}0103125T_2^2 - 0{,}00515625T_3^2 - 0{,}00515625T_1^2 = T_2^1$

$$1{,}0103125T_2^2 - 0{,}00515625T_3^2 - 0{,}00515625T_1^2 = 0{,}00391389$$

i = 3 n = 1 $1{,}0103125T_3^2 - 0{,}00515625T_4^2 - 0{,}00515625T_2^2 = T_3^1$

$$1{,}0103125T_3^2 - 0{,}00515625T_4^2 - 0{,}00515625T_2^2 = 0{,}00132236$$

i = 4 n = 1 $1{,}0103125T_4^2 - 0{,}00515625T_5^2 - 0{,}00515625T_3^2 = T_4^1$

$$1{,}0103125T_4^2 - 0{,}00515625T_3^2 = 0 + 0{,}00515625\,(50) = 0{,}2551877 = 0{,}5130002$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\begin{bmatrix} 1{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 & 0 \\ -0{,}00515625 & 1{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 \\ 0 & -0{,}00515625 & 1{,}0103125 & -0{,}00515625 \\ 0 & 0 & -0{,}00515625 & 1{,}0103125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ T_3^2 \\ T_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5390003 \\ 0{,}00391389 \\ 0{,}00132236 \\ 0{,}5130002 \end{bmatrix}$$

$$T_1^2 = 1{,}5233509$$
$$T_2^2 = 0{,}01166875$$
$$T_3^2 = 0{,}00395995$$
$$T_4^2 = 0{,}50778409$$

Método de Crank-Nicolson

$$(2+2\lambda)T_i^{n+1} - \lambda T_{i-1}^{n+1} - \lambda\, T_{i+1}^{n+1} = (2-2\lambda)T_i^n + \lambda\, T_{i-1}^n + \lambda\, T_{i+1}^n$$

$$(2+2\lambda) = 2 + 2\ (0{,}00515625) = 2{,}0103125$$

$$(2-2\lambda) = 2 - 2\ (0{,}00515625) = 1{,}9896875$$

Primera iteración

i = 1 n = 0

$$2{,}0103125\,T_1^1 - 0{,}00515625\,T_2^1 - 0{,}00515625\,T_0^1 = 1{,}9896875\ T_1^0 + 0{,}00515625\ T_2^0 + 0{,}00515625\,T_0^0$$

$$2{,}0103125\,T_1^1 - 0{,}00515625\,T_2^1 = 0{,}00515625\,(150) + 1{,}9896875\ (150) + 0{,}00515625\ (0) + 0{,}00515625\,(0)$$

$$2{,}0103125\,T_1^1 - 0{,}00515625\,T_2^1 = 1{,}546875$$

i = 2 n = 0

$$2{,}0103125\,T_2^1 - 0{,}00515625\,T_3^1 - 0{,}00515625\,T_1^1 = 1{,}9896875\ T_2^0 + 0{,}00515625\ T_3^0 + 0{,}00515625\,T_1^0$$

$$2{,}0103125\,T_2^1 - 0{,}00515625\,T_3^1 - 0{,}00515625\,T_1^1 = 1{,}9896875\,(0) + 0{,}00515625\ (0) + 0{,}00515625\,(0)$$
$$2{,}0103125\,T_2^1 - 0{,}00515625\,T_3^1 - 0{,}00515625\,T_1^1 = 0$$

i = 3 n = 0

$$2{,}0103125\,T_3^1 - 0{,}00515625\,T_4^1 - 0{,}00515625\,T_2^1 = 1{,}9896875\ T_3^0 + 0{,}00515625\ T_4^0 + 0{,}00515625\,T_2^0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$2{,}0103125\,T_3^1 - 0{,}00515625\,T_4^1 - 0{,}00515625\,T_2^1 = 1{,}9896875\,(0) + 0{,}00515625\ (0) + 0{,}00515625\,(0)$$

$$2{,}0103125\,T_3^1 - 0{,}00515625\,T_4^1 - 0{,}00515625\,T_2^1 = 0$$

i = 4 n = 0

$$2{,}0103125\,T_4^1 - 0{,}00515625\,T_5^1 - 0{,}00515625\,T_3^1 = 1{,}9896875\ T_4^0 + 0{,}00515625\ T_5^0 + 0{,}00515625\,T_3^0$$

$$2{,}0103125\,T_4^1 - 0{,}00515625\,T_3^1 = 0{,}00515625\,(50) + 1{,}9896875\,(0) + 0{,}00515625\ (50) + 0{,}00515625\,(0)$$

$$2{,}0103125\,T_4^1 - 0{,}00515625\,T_3^1 = 0{,}515625$$

$$\begin{bmatrix} 2{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 & 0 \\ -0{,}00515625 & 2{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 \\ 0 & -0{,}00515625 & 2{,}0103125 & -0{,}00515625 \\ 0 & 0 & -0{,}00515625 & 2{,}0103125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ T_3^1 \\ T_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}546875 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}515625 \end{bmatrix}$$

$$T_1^1 = 0{,}7694749$$
$$T_2^1 = 0{,}0019753$$
$$T_3^1 = 0{,}0006629$$
$$T_4^1 = 0{,}2564916$$

Segunda iteración

i = 1 n = 1

$$2{,}0103125\,T_1^2 - 0{,}00515625\,T_2^2 - 0{,}00515625\,T_0^2 = 1{,}9896875\ T_1^1 + 0{,}00515625\ T_2^1 + 0{,}00515625\,T_0^1$$

$$2{,}0103125\,T_1^2 - 0{,}00515625\,T_2^2 = 0{,}00515625\,(150) + 1{,}9896875\,(150) + 0{,}00515625\ (0{,}7694749)$$
$$+ 0{,}00515625\,(0{,}0019753)$$

$$2{,}0103125\,T_1^2 - 0{,}00515625\,T_2^2 = 3{,}0778999$$

i = 2 n = 1

$$2{,}0103125\,T_2^2 - 0{,}00515625\,T_3^2 - 0{,}00515625\,T_1^2 = 1{,}9896875\ T_2^1 + 0{,}00515625\ T_3^1 + 0{,}00515625\,T_1^1$$

$$2{,}0103125\,T_2^2 - 0{,}00515625\,T_3^2 - 0{,}00515625\,T_1^2 = 1{,}9896875\,(0{,}0019753) + 0{,}00515625\ (0{,}0006629)$$
$$+ 0{,}00515625\,(0{,}7694749)$$

$$2{,}0103125\,T_2^2 - 0{,}00515625\,T_3^2 - 0{,}00515625\,T_1^2 = 0{,}0079013$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

i = 3 n = 1

$$2{,}0103125T_3^2-0{,}00515625T_4^2-0{,}00515625T_2^2=1{,}9896875\,T_3^1+0{,}00515625\,T_4^1+0{,}00515625T_2^1$$

$$2{,}0103125T_3^2-0{,}00515625T_4^2-0{,}00515625T_2^2=1{,}9896875\,(0{,}0006629)+0{,}00515625\,(0{,}25649167)$$
$$+\,0{,}00515625\,(0{,}0019753)$$
$$2{,}0103125T_3^2-0{,}00515625T_4^2-0{,}00515625T_2^2=0{,}00265177$$

i = 4 n = 1

$$2{,}0103125T_4^2-0{,}00515625T_5^2-0{,}00515625T_3^2=1{,}9896875\,T_4^1+0{,}00515625\,T_5^1+0{,}00515625T_3^1$$

$$2{,}0103125T_4^2-0{,}00515625T_3^2=0{,}00515625(50)+1{,}9896875\,(0{,}25649167)+0{,}00515625\,(50)$$
$$+\,0{,}00515625\,(0{,}0006629)$$

$$2{,}0103125T_4^2-0{,}00515625T_3^2=1{,}0259667$$

$$\begin{bmatrix}2{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0 & 0\\ -0{,}00515625 & 2{,}0103125 & -0{,}00515625 & 0\\ 0 & -0{,}00515625 & 2{,}0103125 & -0{,}00515625\\ 0 & 0 & -0{,}00515625 & 2{,}0103125\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1^2\\ T_2^2\\ T_3^2\\ T_4^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}0778999\\ 0{,}00790131\\ 0{,}00265177\\ 1{,}0259667\end{bmatrix}$$

$$T_1^2=1{,}5310756$$
$$T_2^2=0{,}0078642$$
$$T_3^2=0{,}0026483$$
$$T_4^2=0{,}5103586$$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica, por los métodos explicito, implícito y de Crank-Nicolson.

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad 0\le x\le 2$$
$$u(0,t)=u(2,t)=0$$
$$u(x,0)=sen\,\frac{\pi}{2}x \qquad \Delta x=0{,}5 \qquad \Delta y=0{,}05$$

Método explícito

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}-\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}=0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$20u_i^{n+1} - 20u_i^n = 4u_{i+1}^n - 8u_i^n + 4u_{i-1}^n$$

$$20u_i^{n+1} = 4u_{i+1}^n + 12u_i^n + 4u_{i-1}^n$$

$$u_i^{n+1} = 0{,}2u_{i+1}^n + 0{,}6u_i^n + 0{,}2u_{i-1}^n$$

i = 1 $\quad x_1 = 0{,}5 \quad u_1^0 = sen\,\frac{\pi}{2}(0{,}5) = 0{,}7071$

i = 2 $\quad x_2 = 1 \quad u_2^0 = sen\,\frac{\pi}{2}(1) = 1$

i = 3 $\quad x_3 = 0{,}75 \quad u_3^0 = sen\,\frac{\pi}{2}(1{,}5) = 0{,}7071$

Primera iteración

i = 1 n = 0

$$u_1^1 = 0{,}2u_2^0 + 0{,}6u_1^0 + 0{,}2u_0^0$$
$$u_1^1 = 0{,}2(1) + 0{,}6(0{,}7071) + 0{,}2(1) = 0{,}62426$$

i = 2 n = 0

$$u_2^1 = 0{,}2u_3^0 + 0{,}6u_2^0 + 0{,}2u_1^0$$
$$u_2^1 = 0{,}2(0{,}7071) + 0{,}6(1) + 0{,}2(0) = 0{,}88284$$

i = 3 n = 0

$$u_3^1 = 0{,}2u_4^0 + 0{,}6u_3^0 + 0{,}2u_2^0$$
$$u_3^1 = 0{,}2(0) + 0{,}6(0{,}7071) + 0{,}2(1) = 0{,}62426$$

Segunda iteración

i = 1 n = 1

$$u_1^2 = 0{,}2u_2^1 + 0{,}6u_1^1 + 0{,}2u_0^1$$
$$u_1^2 = 0{,}2(0{,}88284) + 0{,}6(0{,}62426) + 0{,}2(0) = 0{,}55112$$

i = 2 n = 1

$$u_2^2 = 0{,}2u_3^1 + 0{,}6u_2^1 + 0{,}2u_1^1$$
$$u_2^2 = 0{,}2(0{,}62426) + 0{,}6(0{,}88284) + 0{,}2(0{,}62426) = 0{,}77941$$

i = 3 n = 1

$$u_3^2 = 0{,}2u_4^1 + 0{,}6u_3^1 + 0{,}2u_2^1$$
$$u_3^1 = 0{,}2(0) + 0{,}6(0{,}62426) + 0{,}2(0{,}88284) = 0{,}55112$$

Método implícito

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$20u_i^{n+1}-20u_i^n=4u_{i+1}^{n+1}-8u_i^{n+1}+4u_{i-1}^{n+1}$$

$$28u_i^{n+1}-4u_{i+1}^n-4u_{i-1}^n=20u_i^n$$

i = 1 x$_1$ = 0,5 $u_1^0=sen\,\frac{\pi}{2}(0{,}5)=0{,}7071$

i = 2 x$_2$ = 1 $u_2^0=sen\,\frac{\pi}{2}(1)=1$

i = 3 x$_3$ = 0,75 $u_3^0=sen\,\frac{\pi}{2}(1{,}5)=0{,}7071$

Primera iteración

i = 1 n = 0 $28u_1^1-4u_2^1-4u_0^1=20u_1^0$

$$28u_1^1-4u_2^1=20(0{,}7071)+4(0)=14{,}14212$$

i = 2 n = 0 $28u_2^1-4u_3^1-4u_1^1=20u_2^0$

$$28u_1^1-4u_2^1=20(0{,}7071)+4(0)=14{,}14212$$

i = 3 n = 0 $28u_3^1-4u_4^1-4u_2^1=20u_3^0$

$$28u_1^1-4u_2^1=20(0{,}7071)+4(0)=14{,}14212$$

$$\begin{bmatrix}28 & -4 & 0\\ -4 & 28 & -4\\ 0 & -4 & 28\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^1\\ u_2^1\\ u_3^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14{,}14212\\ 20\\ 14{,}14212\end{bmatrix}$$

$$u_1^1=0{,}63295$$
$$u_2^1=0{,}89512$$
$$u_3^1=0{,}63295$$

Segunda iteración

i = 1 n = 1 $28u_1^2-4u_2^2-4u_0^2=20u_1^1$

$$28u_1^2-4u_2^2=20(0{,}63295)+4(0)=12{,}659$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

i = 2 n = 1 $$28u_2^2 - 4u_3^2 - 4u_1^2 = 20u_2^1$$

$$28u_1^2 - 4u_2^2 = 20(0{,}89512) = 17{,}9024$$

i = 3 n = 1 $$28u_3^2 - 4u_4^2 - 4u_2^2 = 20u_3^1$$

$$28u_1^2 - 4u_2^2 = 20(0{,}63295) + 4(0) = 12{,}659$$

$$\begin{bmatrix} 28 & -4 & 0 \\ -4 & 28 & -4 \\ 0 & -4 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}659 \\ 17{,}9024 \\ 12{,}659 \end{bmatrix}$$

$$u_1^2 = 0{,}56657$$
$$u_2^2 = 0{,}80125$$
$$u_3^2 = 0{,}56657$$

Método de Crank-Nicolson

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right]$$

$$20u_i^{n+1} - 20u_i^n = \frac{1}{2}\left[4u_{i+1}^{n+1} - 8u_i^{n+1} + 4u_{i-1}^{n+1} + 4u_{i+1}^n - 8u_i^n + 4u_{i-1}^n\right]$$

$$40u_i^{n+1} - 40u_i^n = 4u_{i+1}^{n+1} - 8u_i^{n+1} + 4u_{i-1}^{n+1} + 4u_{i+1}^n - 8u_i^n + 4u_{i-1}^n$$

$$48u_i^{n+1} - 4u_{i+1}^{n+1} - 4u_{i-1}^{n+1} = 4u_{i+1}^n - 32u_i^n + 4u_{i-1}^n$$

i = 1 $x_1 = 0{,}5$ $$u_1^0 = sen\,\frac{\pi}{2}(0{,}5) = 0{,}7071$$

i = 2 $x_2 = 1$ $$u_2^0 = sen\,\frac{\pi}{2}(1) = 1$$

i = 3 $x_3 = 0{,}75$ $$u_3^0 = sen\,\frac{\pi}{2}(1{,}5) = 0{,}7071$$

Primera iteración

i = 1 n = 0 $$48u_1^1 - 4u_2^1 - 4u_0^1 = 4\,u_2^0 + 32u_1^0 + 4u_0^0$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

$$48u_1^1 - 4u_2^1 = 4(0) + 4\,(1) + 32\,(0{,}7071) + 4(0)$$

$$48u_1^1 - 4u_2^1 = 26{,}62739$$

i = 2 n = 0

$$48u_2^1 - 4u_3^1 - 4u_1^1 = 4\,u_3^0 + 32u_2^0 + 4u_1^0$$

$$48u_2^1 - 4u_3^1 - 4u_1^1 = 4(0{,}7071) + 32(1) + 4(0{,}7071)$$

$$48u_2^1 - 4u_3^1 - 4u_1^1 = 37{,}65685$$

i = 3 n = 0

$$48u_3^1 - 4u_4^1 - 4u_2^1 = 4\,u_4^0 + 32u_3^0 + 4u_2^0$$

$$48u_3^1 - 4u_2^1 = 4(0) + 4(0) + 32\,(0{,}7071) + 4(1)$$

$$48u_3^1 - 4u_2^1 = 26{,}62739$$

$$\begin{bmatrix} 48 & -4 & 0 \\ -4 & 48 & -4 \\ 0 & -4 & 48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26{,}62739 \\ 37{,}65685 \\ 26{,}62739 \end{bmatrix}$$

$u_1^1 = 0{,}62885$
$u_2^1 = 0{,}88932$
$u_3^1 = 0{,}62885$

Segunda iteración

i = 1 n = 1

$$48u_1^2 - 4u_2^2 - 4u_0^2 = 4\,u_2^1 + 32u_1^1 + 4u_0^1$$

$$48u_1^2 - 4u_2^2 = 4(0) + 4\,(0{,}88932) + 32(0{,}62885) + 4(0)$$

$$48u_1^2 - 4u_2^2 = 23{,}68048$$

i = 2 n = 1

$$48u_2^2 - 4u_3^2 - 4u_1^2 = 4\,u_3^1 + 32u_2^1 + 4u_1^1$$

$$48u_2^2 - 4u_3^2 - 4u_1^2 = 4(0{,}62885) + 32\,(0{,}88932) + 4(0{,}62885)$$

$$48u_2^2 - 4u_3^2 - 4u_1^2 = 33{,}48904$$

ISBN: 978-631-6557-41-4

i = 3 n = 1 $48u_3^2 - 4u_4^2 - 4u_2^2 = 4\,u_4^1 + 32u_3^1 + 4u_2^1$

$$48u_3^2 - 4u_2^2 = 4(0) + 4(0) + 32(0{,}62885) + 4(0{,}88932)$$

$$48u_3^2 - 4u_2^2 = 23{,}68048$$

$$\begin{bmatrix} 48 & -4 & 0 \\ -4 & 48 & -4 \\ 0 & -4 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23{,}68048 \\ 33{,}48904 \\ 23{,}68048 \end{bmatrix}$$

$u_1^2 = 0{,}55925$

$u_2^2 = 0{,}79089$

$u_3^2 = 0{,}55925$

BIBLIOGRAFÍA

Agud, L. (2020). *Método de la bisección para la resolución de ecuaciones.*

Arévalo Ovalle, D., Bernal Yermanos, M. Á., & Posada Restrepo, J. A. (2021). Métodos numéricos con Python. *Catálogo Editorial*. https://doi.org/10.15765/poli.v1i978.2842

Ayres, F. (1969). *Ecuaciones diferenciales*. MCGRAW-HILL. https://books.google.com.ec/books?id=99lQxgEACAAJ

Botello, S. (2011). Ejemplos de Aplicación de los Métodos Numéricos a Problemas de Ingeniería. *Centro de Investigación En Matemáticas A.C.*

Burden, R., & Faires, J. (2002). Análisis Numérico. In *Grupo Editorial Iberoamericano*.

Burden, R. L. (2011). *Análisis Numérico*. Cengage Learning. https://books.google.com.ec/books?id=YsnDMgEACAAJ

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros (7a. ed.).* McGraw-Hill Interamericana. https://books.google.com.ec/books?id=Q1JVAQAACAAJ

Conde, C., & Schiavi, E. (2013). Métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales. *VIRTUALPRO , Procesos Industriales.*

Danílina, N., Dubróvskaya, N., Kvashá, O., & Smirnov, G. (1985). *Matemática de cálculo* (1st ed.). Editorial Mir Moscú.

Demidovich, B. P., & Maron, I. A. (1993). *Cálculo numérico fundamental*. Paraninfo. https://books.google.com.ec/books?id=7vUacAAACAAJ

Escalante, R. (2022). *Métodos numéricos: una introducción a las matemáticas del cálculo científico*. Editorial Universidad de Alcala. https://elibro.net/es/lc/ujaen/titulos/227876

Estela Urbina, R. O., Danducho Paati, J. J., Chiclote Alcalde, S. M., Incio Flores, F. A., Santamaría Baldera, N., Fernández Villarroel, R. Á., Carcausto Quispe, C., Guzmán Cáceres, G., Cárdenas León, M. E., & Castro Vargas, D. J. (2022). Métodos numéricos aplicados al cálculo hidráulico en canales de regadío de Bagua. *Revista Científica Dékamu Agropec*, *3*(1). https://doi.org/10.55996/dekamuagropec.v3i1.70

Faure, O. R., Rougier, V. C., & Quiroga, G. M. (2018). Métodos Numéricos en Problemas de Ingeniería. *Mecánica Computacional*, *36*(22).

Granados Ospina, A. (2015). Las TIC en la enseñanza de los métodos numéricos. *Sophia*, *11*(2).

Guerra A., L. G., Terán A., G. R., Arequipa Q., E. R., Guachamin, J. O., & Poma L., L. S. (2023). Métodos Numéricos Aplicados a la Experimentación Física: Caso de Estudio

(Dinámica). *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *7*(3). https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i3.6186

Jimenez Serrano, E. (2021). Inteligencia artificial, técnicas de simulación, y su futuro en la ingeniería industrial. *EPISTEMUS*, *14*(29). https://doi.org/10.36790/epistemus.v14i29.129

Lima Pisco, R. J., Cedeño Ferrin, J. A., & Padilla Orlando, M. A. (2020). Aplicación de los métodos numéricos en la enseñanza superior. *Revista Científica Sinapsis*, *1*(16). https://doi.org/10.37117/s.v2i17.356

Luthe, R., Olivera, A., García, R. L., & Schutz, F. (1988). *Métodos numéricos*. Limusa. https://books.google.com.ec/books?id=3eRnPgAACAAJ

Nakamura, S. (2000). *Métodos numéricos aplicados con software*. Pearson Prentice Hall. https://books.google.com.ec/books?id=NRSNAQAACAAJ

Nieves Hurtado, A. (2015). *Métodos numéricos: aplicados a la ingeniería*. Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/lc/ujaen/titulos/39455

Pérez Rojas, J. L., Noguera Cundar, A. J., & Bastidas Alarcón, F. E. (2022). Métodos Numéricos Aplicaciones en Ingeniería y Ciencias Básicas. In *Métodos Numéricos Aplicaciones en Ingeniería y Ciencias Básicas*. https://doi.org/10.55204/pmea.6

Rega Armas, D., Guerra Véliz, Y., & Leyva Haza, J. (2022). Los métodos numéricos, el Excel y la física en la carrera de ingeniería agrónoma. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*. https://doi.org/10.51896/atlante/ciep6397

Rodríguez Ojeda, L. (2016). *Análisis numérico básico, un enfoque algorítmico con el soporte Phyton* (4.3, Vol. 1). ESPOL.

Sarraf, S. S., D'elía, J., Battaglia, L., & López, E. J. (2014). Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. *Rev. Int. Métodos Numér. Cálc. Diseño Ing*, *30*(4).

Scheid, F., Costanzo Lorencez, R. E. Di, Di Constanzo Lorencez, R. E., & Di Costanzo, R. E. (1991). *Métodos numéricos*. McGraw-Hill. https://books.google.com.ec/books?id=b65qAQAACAAJ

Seminario, R. (2012). Metodos Númericos Para Ingeniería. *Libro*.

Torres Ortega, J. A. (2013). *Introducción a los métodos numéricos*. Universidad de La Salle - Ediciones Unisalle. https://elibro.net/es/lc/ujaen/titulos/221249

ISBN: 978-631-6557-41-4

DE LOS AUTORES

José Omar Cabrera Escobar

Ingeniero mecánico por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, magister en diseño mecánico por la Universidad Internacional SEK, magister en ingeniería matemática y computación por la Universidad Internacional de la Rioja, doctor en avances en ingeniería de materiales y energías sostenibles por la Universidad de Jaén, docente investigador de la Universidad Nacional de Chimborazo.

Lenin Santiago Orozco Cantos

Ingeniero Mecánico por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y magister en Eficiencia Energética por las Escuela Politécnica Nacional con experiencia en el sector petrolero y desempeño docente para la UTPL en calidad de profesor evaluador. Docente en la Facultad de Mecánica ESPOCH con participación en proyectos de Eficiencia Energética y energías renovables como eólica, solar y uso de recursos hídricos. Docente en la Facultad de Ingeniería en la UNACH, carrera de Ing. Ambiental, con tutorías de tesis de pregrado y postgrado en Análisis y diseño de sistemas energéticos sostenibles.

ISBN: 978-631-6557-41-4

Raúl Vinicio Cabrera Escobar

Ingeniero automotriz por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, magister en gestión del mantenimiento industrial por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, docente investigador de tercer nivel.

PUERTO MADERO
EDITORIAL

ISBN 978-631-6557-41-4